

Uma introdução à convexidade em grafos

Júlio Araújo
Mitre Dourado
Fábio Protti
Rudini Sampaio

34^o

Colóquio
Brasileiro de
Matemática

impa



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

Uma introdução à convexidade em grafos

Uma introdução à convexidade em grafos

Primeira impressão, setembro de 2023

Copyright © 2023 Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-85-244-0547-1 (print)

ISBN 978-85-244-0545-7 (ebook)

MSC (2020) Primary: 68R01, Secondary: 05C85, 68Q17, 52A01, 52A37, 68Q27

Coordenação Geral

Carolina Araujo

Produção Books in Bytes

Capa IMPA

Realização da Editora do IMPA

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br

editora@impa.br

AR663i

Araújo, Júlio

Uma introdução à convexidade em grafos / Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio. - 1.ed. -- Rio de Janeiro: IMPA, 2023.

34 Colóquio Brasileiro de Matemática; v. 1, 182p.: il.; 23cm

ISBN 978-85-244-0547-1 (print)

ISBN 978-85-244-0545-7 (ebook)

1. Convexidade em Grafos. 2. Teoria dos Grafos. 3.

Complexidade Computacional. I. Dourado, Mitre; Protti, Fabio;

Sampaio, Rudini. II. Série. III. Título

UDC: 519.1

Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

Dedicatória



Este livro é singelamente dedicado aos excepcionais professores e pesquisadores Jayme Luiz Szwarcfiter (à esquerda) e Nelson Maculan Filho (à direita), que recentemente completaram 80 anos. Desejamos saúde a ambos para que continuem a ser esses exemplos a serem seguidos pelas mais diversas gerações futuras.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer inicialmente à Profa. Celina de Figueiredo pelo essencial incentivo dado para a realização desta obra. Agradecemos também a Emanuel Elias pela grande ajuda com a revisão bibliográfica.

JA, MCD, FP, RMS

Agradeço ao Prof. Jayme Szwarcfiter por ter me apresentado a área de Convexidade em Grafos em 2010, em Grenoble, em um evento em que participamos. Desde então me encantei pela área e tenho trabalhado continuamente nesse tema. Dedico este trabalho à minha esposa Karol Maia e ao nosso filho Igor.

Júlio Araújo

Eu gostaria de agradecer ao Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter por ter previsto que o estudo da Complexidade Computacional da Convexidade em Grafos seria frutífero e, principalmente, por ter nos contado com antecedência. Se a área continuará a crescer? Só ele pode responder.

Mitre C. Dourado

Meus agradecimentos vão para o Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, sem o qual nada do que realizei como pesquisador teria se concretizado. Agradeço a Deus por ter colocado pessoas brilhantes e competentes ao meu lado, pois elas me incentivaram a evoluir profissionalmente. Dedico este livro à minha esposa Érica e aos nossos filhos Olívia, Inês e Eduardo.

Fábio Protti

Agradeço ao Jayme por me apresentar este tema em Fortaleza em 2011, dando-me a oportunidade de ser seu coautor. Dedico este livro à Ana Karina, minha namorada desde os 16 anos, e a nossos filhos Samuel, Catarina e Miguel, que tiveram paciência pelas noites viradas escrevendo este livro. Que Deus os abençoe sempre e também a todos os que lerem estas páginas!

Rudini M. Sampaio

Apresentação

É uma grande satisfação ter a oportunidade de escrever esta apresentação. Tanto pelos autores quanto devido ao tema escolhido. O livro vem preencher uma lacuna da ausência de um texto dessa natureza na literatura. O único material que se aproxima desse livro é proveniente de um autor da Universidade de Barcelona, mas que difere basicamente da presente proposta. Não há outros registros de livros na literatura mundial que tratam a convexidade com esse enfoque, em que aspectos de complexidade computacional assumem papel preponderante.

Após introduzir algumas noções básicas de convexidade, o texto apresenta o protagonista do livro, a convexidade em grafos. A ênfase é na área de convexidade que contém quase a totalidade dos trabalhos realizados até o momento, qual seja, a convexidade de caminhos em grafos.

Em seguida, são apresentados parâmetros de convexidade, nos quais se concentra a maior parte da pesquisa até então. A determinação desses parâmetros, nas diferentes convexidades, é uma das motivações principais do trabalho realizado em convexidade.

De um modo geral, os parâmetros de convexidade podem ser agrupados em dois tipos distintos. Aqueles oriundos da área de convexidade abstrata, compreendendo estudos algébricos e geométricos, e aqueles motivados pela área da complexidade computacional. O primeiro desses tipos inclui parâmetros como número de Carathéodory, número de Radon, número de Helly e o Posto. Esses parâmetros são tratados na literatura há vários anos, pelo menos desde o início do século passado ou antes. Enquanto isso, os parâmetros motivados pela complexidade computacional são bem mais recentes. Entre esses, encontram-se o número de envoltória, número de convexidade, número de intervalo, entre outros. O livro abrange o estudo da computação desses dois tipos de parâmetros.

No capítulo seguinte, são descritos conceitos de convexidade geométrica em grafos. Nesse contexto, surgem naturalmente várias classes de grafos conhecidas no contexto de complexidade computacional, como grafos de intervalo, intervalo próprio, cografos, grafos cordais, fortemente cordais, dentre outras.

Além disso, o texto apresenta, em detalhe, o estudo da determinação de parâmetros nas diferentes convexidades. O livro ainda contém uma descrição de algumas aplicações de convexidade, inclusive em grafos.

Tenho acompanhado o desenvolvimento dos trabalhos envolvendo convexidade em grafos no Brasil desde os seus primórdios. Sou testemunha do progresso que essa área tem experimentado no país nos últimos tempos. Na realidade, eu me aventuraria a afirmar que o Brasil é possivelmente o principal centro de desenvolvimento da pesquisa em convexidade em grafos.

Até onde tenho notícia, os primeiros trabalhos em convexidade no Brasil foram realizados há mais de vinte anos. Desde aquela época, até os dias de hoje, foi enorme o desenvolvimento da área no país.

Os primeiros trabalhos foram realizados na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Pouco após, alcançaram a Universidade Federal Fluminense, a Universidade Federal do Ceará, a Universidade Federal de Goiás e a Universidade Federal de Minas Gerais. Coincidência ou não, as universidades de origem dos autores deste trabalho são exatamente as três primeiras.

Além disso, pouco após a realização dos primeiros trabalhos na área, por meio de um projeto de cooperação CAPES-DAAD, a UFRJ recebeu a visita do pesquisador Dieter Rautenbach, na ocasião vinculado à Universidade de Ilmenau, tendo posteriormente se transferido para a Universidade de Ulm, onde se encontra presentemente. Essa cooperação perdura até hoje, inclusive com a inclusão da pesquisadora Lúcia Penso, também da Universidade de Ulm. São inúmeras as contribuições de Dieter, nos trabalhos realizados, em convexidade e temas correlatos, com pesquisadores do país. Na realidade, esta cooperação foi um fator dos mais relevantes para o desenvolvimento da área de convexidade no Brasil.

Para ilustrar a riqueza de temas e a abrangência da área, quando um grupo de pesquisadores se reunia ao redor de uma mesa, para discutir que assuntos de pesquisas que seriam considerados naquela reunião, era comum ouvir o seguinte diálogo:

Sobre o que iremos discutir hoje ?
E sobre qual convexidade ?
E sobre qual parâmetro ?
E com qual objetivo ?

Na realidade, as possibilidades de pesquisas no tema são diversas. O diálogo bem ilustra este fato. Para finalizar, gostaria de uma vez mais ressaltar a excelência, a qualidade, e a oportunidade do trabalho dos autores.

Jayme Luiz Szwarcfiter
UFRJ UERJ

Prefácio

Como veremos, a Convexidade em Grafos é uma área jovem de pesquisa, que começou a ser estudada recentemente, mas que já possui uma vasta literatura de artigos científicos. Por causa dessa jovialidade, existe nessa área, ao contrário de outras áreas mais antigas da Matemática, boas possibilidades de se produzir contribuições relevantes por parte de pesquisadores e estudantes. Grande parte da produção científica recente em Convexidade de Grafos foi publicada em inglês por autores brasileiros, fazendo com que o Brasil seja um dos países com maior peso nesse tema. Desse modo, este livro em português é um convite para que você se anime com essa belíssima área e ajude nossa comunidade a desenvolvê-la cada vez mais.

A Convexidade em Grafos nasceu como um trabalho de transposição dos conceitos de Geometria Convexa para o campo da Combinatória. Dessa forma, uma geodésica conectando dois pontos de um espaço se traduz naturalmente em um caminho mínimo entre dois vértices de um grafo; e o fecho convexo de um conjunto de pontos tem o seu análogo combinatorio determinado pela operação iterativa de adição de novos vértices que se encontram em caminhos mínimos entre vértices já incluídos no fecho. Tais conceitos formam a essência da chamada Convexidade Geodésica, a partir da qual outras convexidades foram sendo definidas, ora considerando outros tipos de caminhos além dos caminhos mínimos (como, por exemplo, os caminhos induzidos associados à Convexidade Monofônica), ora considerando outras regras para a determinação de fechos convexos.

Uma característica particular da Convexidade em Grafos no Brasil é o seu surgimento no seio da área de Computação, especificamente na subárea de Algoritmos e Complexidade. O grupo de pesquisadores brasileiros que se dedicou inicialmente às pesquisas em Convexidade logo tratou de considerar os problemas pertinentes ao tema de um ponto de vista algorítmico. Por exemplo: Qual é a complexidade do problema de determinar o menor conjunto de vértices cujo fecho convexo é igual ao conjunto de vértices do grafo? Sendo este problema NP-difícil, para quais classes de grafos podemos projetar algoritmos de tempo polinomial que resolvam esse problema? E várias outras questões com o mesmo

“apelo algorítmico” têm sido colocadas desde a origem das pesquisas em nosso país. Isto não quer dizer que este livro é voltado para a comunidade de Algoritmos e Complexidade, pois introduz os temas sempre procurando inicialmente focar na sua fundamentação teórica. Acreditamos que matemáticos e estudantes de outras áreas usufruirão sem dúvida do conteúdo deste texto.

Como usar este livro

Este livro foi escrito como parte de um minicurso do 34^o Colóquio Brasileiro de Matemática (IMPA) em Julho de 2023. Há muito tempo existia a vontade de escrever um livro nessa área por parte de alguns pesquisadores e essa foi uma excelente oportunidade para isso. Nesse ponto, temos muito a agradecer à equipe do IMPA, principalmente ao Prof. Paulo Ney de Souza, que nos ajudou com muitas sugestões e correções, além de informações culturais muito relevantes.

Buscamos fornecer um conteúdo autocontido, para que estudantes possam compreender o tema sem a necessidade de recorrer a outras fontes. No entanto, em alguns capítulos, principalmente nos temas mais técnicos, existem apenas menções a certos resultados, com a devida referência bibliográfica.

O livro é dividido em duas partes. A Parte I contém as definições e os resultados gerais da área de Convexidade de Grafos, enquanto que a Parte II contém definições e resultados mais específicos, como resultados mais técnicos das principais convexidades e algumas aplicações recentes, como jogos de convexidade.

Sumário

I	Fundamentos de Convexidade em Grafos	1
1	Noções Básicas de Convexidade	2
1.1	Geometria Convexa: conceitos básicos	3
1.2	Clássicos: Carathéodory, Radon e Helly	5
1.3	Posição Geral e Posição Convexa	8
1.4	Exercícios	9
2	Convexidade em Grafos	10
2.1	Convexidades gerais sobre conjunto finitos	10
2.2	Convexidades em Grafos	13
2.3	Convexidades de Caminhos em Grafos	15
2.4	Convexidades de Grafos não baseadas em caminhos	16
2.5	Exercícios	17
3	Parâmetros de Convexidade de Grafos	19
3.1	Número de Envoltória	20
3.2	Números de Intervalo e de Convexidade	21
3.3	Tempos de Iteração e de Percolação	24
3.4	Números de Carathéodory, Radon e Helly	25
3.5	Número de Posição Geral e Posto (<i>rank</i>)	28
3.6	Desigualdades entre os parâmetros	30
3.7	Exercícios	33

4	Convexidades Geométricas em Grafos	35
4.1	Convexidade monofônica e grafos cordais	38
4.2	Convexidade geodésica e grafos Ptolemaicos	40
4.3	Convexidade triangular e grafos acíclicos	41
4.4	Convexidade P_3 e as florestas de estrelas	42
4.5	Convexidade l^2 e os cografos cordais	42
4.6	Convexidade m^3 e os grafos bipolarizados fracos	43
4.7	Convexidade forte e grafos fortemente cordais	44
4.8	Convexidade de pedágio e grafos de intervalo	46
4.9	Convexidade de pedágio fraco e grafos de intervalo unitário	49
4.10	Classes hereditárias versus não hereditárias	50
4.11	Exercícios	53
II	Principais Convexidades e Aplicações	55
5	Convexidades P_3 e P_3^*	56
5.1	Relação da Convexidade P_3^* com Geodésica	58
5.2	Resultados para algumas classes de grafos	60
5.3	Número de Envoltória é $W[2]$ -difícil	61
5.4	Tempo de Percolação é $(4/3 - \varepsilon)$ -inaproximável	63
5.5	Exercícios	65
6	Convexidade Geodésica	67
6.1	Números de Intervalo e de Envoltória	68
6.2	Número de Convexidade	78
6.3	Outros parâmetros	83
6.4	Exercícios	88
7	Outras Convexidades	89
7.1	Convexidade Monofônica	89
7.2	Convexidade Triangular	92
7.3	Convexidade de todos os caminhos	94
7.4	Convexidade de Steiner	97
7.5	Exercícios	97
8	Convexidade em Grafos Orientados	98
8.1	A Classe de Torneios	100
8.2	Limites, Propriedades e Resultados Existenciais	101
8.3	Espectro Geodésico	103
8.4	Máximos e Mínimos em todas as orientações	104
8.5	Complexidade	106
8.6	Exercícios	109

9 Aplicações de Convexidade em Grafos	110
9.1 Modelos de Difusão em Grafos	110
9.2 Jogos de Convexidade em Grafos	113
9.3 Exercícios	121
A Teoria dos Grafos	123
B Complexidade Computacional	131
Bibliografia	140
Índice de Notações	154
Índice de Autores	155
Índice Remissivo	156

Parte I

**Fundamentos de Convexidade
em Grafos**

I

Noções Básicas de Convexidade

Convexidade é um tema clássico, estudado em muitas áreas diferentes da Matemática. Entre as contribuições mais antigas, existem várias no livro “*Elementos*”, escrito por Euclides por volta de 300 a.C., bem como a primeira definição precisa de curva ou superfície convexa, dada por Arquimedes por volta de 250 a.C. Matemáticos e físicos antigos, como Kepler, Descartes, Euler, Fourier, Gauss e Cauchy, tiveram contribuições importantes na área de Convexidade. Recomendamos o capítulo “History of Convexity” do livro “*Handbook of Convex Geometry*”, de Gruber e Wills (1993) para maiores detalhes. Outras referências importantes são o livro “*Theory of Convex Structures*” de van de Vel (1993) e o recente livro “*Combinatorial Convexity*” de Bárány (2021).

Apesar dessas contribuições antigas, a área de Convexidade em Geometria ou Geometria Convexa só se tornou um ramo independente da Matemática no início do século XX, principalmente com o desenvolvimento sistemático da Teoria da Convexidade por Hermann Minkowski (1903, 1911), que entre várias contribuições desenvolveu o espaço-tempo quadridimensional de Minkowski, o qual foi de fundamental importância para a Teoria da Relatividade de Einstein. Depois resultados importantes engrandeceram a área, como os Teoremas de Carathéodory (1911), Radon (1921), Helly (1923) e Erdős e Szekeres (1935), que deram as bases à área da Convexidade Combinatória.

O estudo de convexidade aplicada a grafos começou bem depois, na década de 1970. Paul Erdős, um dos matemáticos mais prolíficos da história, publicou em 1972 com outros autores um dos primeiros artigos de convexidade em grafos, focado em torneios¹. De acordo com Duchet (1987), o primeiro artigo explicitamente de convexidade em grafos

¹Torneios são grafos direcionados obtidos da orientação das arestas de um grafo completo.

gerais em inglês é o artigo “Convexity in graphs” de Harary e Nieminen (1981), em que foi introduzido o tempo de iteração, um dos parâmetros de convexidade estudados neste livro. Um de seus autores, Frank Harary, reconhecido como um dos pais da teoria moderna de grafos, introduziu alguns jogos combinatórios (Harary 1984) relacionados à Convexidade em Grafos, que serão vistos no último capítulo.

Na década de 1980, a área de Convexidade em Grafos cresceu bastante e desenvolveu-se com a contribuição de vários pesquisadores, com destaque para Robert E. Jamison, que publicou muitos artigos sobre o tema, que são citados até hoje, como, por exemplo, os artigos (Jamison 1981, 1982), nos quais são introduzidos o posto de um grafo e a convexidade monofônica em grafos².

Nesse momento, você pode se perguntar qual a relevância do estudo da convexidade em grafos, desassociada da geometria. Em um dos seus primeiros artigos, “A perspective on abstract convexity”, ainda nas antigas máquinas de escrever, Jamison (1982) pergunta: “*Por que convexidade abstrata?*”. Antes de fornecer vários argumentos fortes, que fogem ao escopo dessa introdução, ele diz o seguinte:

“Uma possível razão é que convexidade abstrata pode ser feita facilmente. Não é nada difícil criar um conjunto razoável de axiomas para um sistema de conjuntos convexos, um operador de fecho convexo, ou uma função de intervalo generalizada. Mas isso está longe de ser considerado uma resposta satisfatória” (ibid.).

Nos últimos 15 anos, a área de Convexidade em Grafos teve um novo crescimento quando vários pesquisadores de Teoria da Computação começaram a estudar parâmetros de convexidade de grafos do ponto de vista da complexidade computacional, tornando este tema bastante ativo em pesquisas recentes, inclusive com aplicações de difusão e maximização de influência em redes sociais (Seção 9.1), entre outras. Boa parte disso deve-se ao papel do matemático brasileiro Jayme Szwarcfiter que estimulou bastante a pesquisa nessa área, fazendo que o Brasil se tornasse um dos países com maior peso nesse tema.

Mas, antes de entrar no tema principal de Convexidade em Grafos, vamos fornecer um breve resumo introdutório sobre a área de Geometria Convexa. Isso será importante, pois vários conceitos usados em Convexidades de Grafos serão os mesmos da Geometria Convexa, como fecho convexo, pontos extremos, números de Carathéodory, Radon e Helly, posição geral e posição convexa.

1.1 Geometria Convexa: conceitos básicos

Seja $d \geq 2$ um inteiro e \mathbb{R}^d o espaço real d -dimensional. Na geometria, um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é dito *convexo* se S contém qualquer segmento entre dois pontos de S . Como exemplo,

²O posto é um dos principais parâmetros de convexidade em grafos e a convexidade monofônica é uma das principais convexidades de grafos. Ambos são estudados neste livro.

os círculos são convexos no \mathbb{R}^2 e as esferas são convexas no \mathbb{R}^3 , mas as circunferências e as cascas esféricas não são convexas. O *fecho convexo* (do inglês *convex hull*) de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$, denotado por $\text{conv}(S)$, é definido como o menor conjunto convexo que contém S . A Figura 1.1 mostra um conjunto não convexo do plano \mathbb{R}^2 e seu fecho convexo.

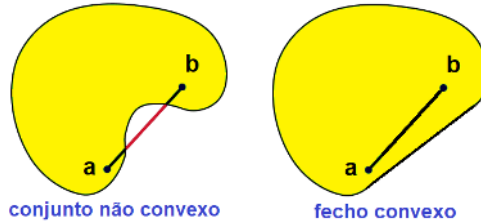


Figura 1.1: Exemplo de fecho convexo no plano euclidiano

O teorema a seguir mostra uma propriedade muito importante dos conjuntos convexas e sua prova será deixada para o Exercício 1.1.

Teorema 1.1. *Seja $d \geq 2$ um inteiro. A interseção de dois conjuntos convexas em \mathbb{R}^d é um conjunto convexo. Ademais \emptyset e \mathbb{R}^d são convexas.*

Um problema natural é obter o menor subconjunto S' de um dado conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\text{conv}(S') = \text{conv}(S)$. A resposta é dada pelo teorema a seguir, cuja primeira versão se deve a Minkowski (1911): S' contém os pontos extremos de $\text{conv}(S)$. Para enunciá-lo, precisamos de algumas definições básicas.

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Dizemos que S é *aberto* se todo ponto $x \in S$ possui uma vizinhança em S , ou seja, existe $r > 0$ tal que todo ponto à distância r de x também pertence a S . Dizemos que S é *fechado* se seu complemento é aberto. Dizemos que S é *limitado* se existe $r > 0$ tal que a distância entre quaisquer dois pontos de S é menor ou igual a r . Finalmente, se S é convexo, dizemos que $x \in S$ é *ponto extremo* de S se $x \notin \text{conv}(S \setminus \{x\})$, ou seja, x não pertence a nenhum segmento entre dois outros pontos de S . Denotamos por $\text{Ext}(S)$ o conjunto de pontos extremos de S .

Teorema 1.2 (Teorema de Minkowski–Krein–Milman). *Todo subconjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ fechado e limitado é o fecho convexo de seus pontos extremos.*

Minkowski (ibid.) provou uma versão restrita desse teorema para \mathbb{R}^3 , que foi estendido por Steinitz (1916) para qualquer \mathbb{R}^d com $d \geq 3$. Krein e Milman (1940) provaram uma generalização desse teorema para espaços não euclidianos. Como exemplo, mostramos um conjunto convexo (em cinza) na Figura 1.2 e observamos que ele é igual ao fecho convexo dos seus pontos extremos.

Definimos agora alguns conceitos gerais que são mais usados em Convexidade de Grafos, mas também possuem motivação em geometria convexa. Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$,

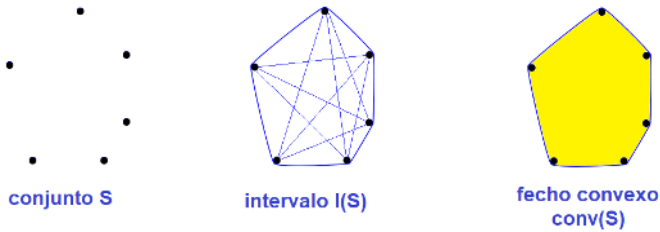


Figura 1.2: Conjunto convexo em cinza é o fecho convexo de seus pontos extremos

o *intervalo* de S , denotado por $I(S)$, é o conjunto de todo ponto em algum segmento entre dois pontos de S inclusive. Denominamos $I(\cdot)$ como *função de intervalo*. Ver Figura 1.2 para um exemplo de um conjunto S , seu intervalo $I(S)$ e seu fecho convexo $\text{conv}(S)$. Note que é possível obter o fecho convexo de S aplicando sucessivamente a função de intervalo. No exemplo da Figura 1.2, vemos que $\text{conv}(S) = I(I(S))$. O *tempo de iteração* de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$, denotado por $\text{ti}(S)$, é definido como o menor inteiro k tal que $I^k(S) = \text{conv}(S)$, ou seja, são necessárias k aplicações da função de intervalo até obter o fecho convexo. No exemplo da Figura 1.2, o tempo de iteração de S é 2.

1.2 Clássicos: Carathéodory, Radon e Helly

Os três teoremas clássicos de Carathéodory, Radon e Helly “*formam os pilares da vasta área de Convexidade Combinatória*” (Gruber e Wills 1993) e serão importantes na área de Convexidade de Grafos, levando à definição de três parâmetros relacionados: o número de Carathéodory, o número de Radon e o número de Helly.

Teorema 1.3 (Carathéodory 1911). *Dado $S \subseteq \mathbb{R}^d$, se $x \in \text{conv}(S)$, então existe $C \subseteq S$ com $|C| \leq d + 1$ tal que $x \in \text{conv}(C)$.*

A Figura 1.3 ilustra o Teorema de Carathéodory: $x \in \text{conv}(S)$, em que S consiste dos pontos de 1 a 8. Note que x também está no fecho convexo de apenas 3 pontos de S . Nesse exemplo do plano \mathbb{R}^2 , temos $d = 2$ e, portanto, $d + 1 = 3$ pontos são suficientes.

O *número de Carathéodory* $\text{cth}(S)$ de um conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é definido como o menor inteiro $r \geq 0$ tal que, para todo $S' \subseteq S$ e $x \in \text{conv}(S')$, existe $C \subseteq S'$ com $|C| \leq r$ tal que $x \in \text{conv}(C)$. Com isso, o Teorema de Carathéodory implica que $\text{cth}(S) \leq d + 1$ para todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo.

Segundo van de Vel (1993), não é difícil provar (Exercício 1.8) que o número de Carathéodory de S também é o tamanho do maior subconjunto Carathéodory independente $C \subseteq S$, em que dizemos que C é *Carathéodory independente* se

$$\text{conv}(C) \neq \bigcup_{x \in C} \text{conv}(C \setminus \{x\}).$$

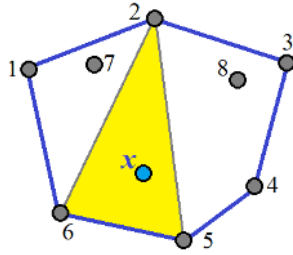


Figura 1.3: Exemplo do Teorema de Carathéodory

Dizemos que um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é *Radon dependente* se S pode ser particionado em dois conjuntos cujos fechos convexos se intersectam; caso contrário, é *Radon independente*.

Teorema 1.4 (Radon 1921). *Todo conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ com $d + 2$ pontos é Radon dependente. Ou seja, todo conjunto Radon independente tem no máximo $d + 1$ pontos.*

Na Figura 1.4, temos dois exemplos de conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ com 4 pontos e suas bi-partições (em cinza claro e cinza escuro) cujos fechos convexos se intersectam. Nesse exemplo do plano \mathbb{R}^2 , temos $d = 2$ e, portanto, são necessários pelo menos $d + 2 = 4$ pontos. O Teorema de Radon foi generalizado para partições em qualquer número $k > 2$ de subconjuntos (Tverberg 1966).

O *número de Radon* $\text{rd}(S)$ de $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo é definido como o tamanho do maior subconjunto Radon independente $S' \subseteq S$. Com isso, o Teorema de Radon implica que $\text{rd}(S) \leq d + 1$ para todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo.

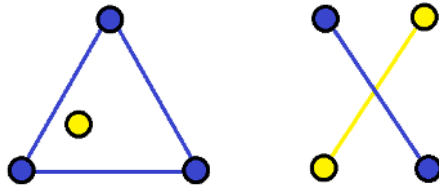


Figura 1.4: Exemplo do Teorema de Radon

Teorema 1.5 (Helly 1923). *Se \mathcal{F} é uma família de conjuntos convexos em \mathbb{R}^d tal que cada $d + 1$ membros de \mathcal{F} tem um ponto em comum, então todos os membros de \mathcal{F} tem um ponto em comum.*

O Teorema de Helly (ibid.), provado em 1913 mas só publicado em 1923, possui muitas generalizações, como uma versão com cores (Bárány 2021). Um típico teorema *Helly-type* tem o seguinte formato: *Se cada grupo de n membros de uma família de objetos possui uma certa propriedade, então toda a família possui essa propriedade.* No Teorema 1.5, a propriedade é ter um ponto em comum.

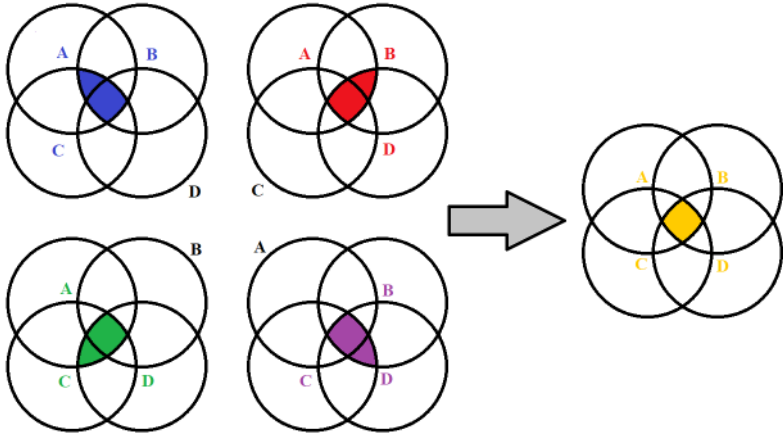


Figura 1.5: Exemplo do Teorema de Helly para \mathbb{R}^2 : interseção não vazia 3 a 3 implica interseção não vazia de todos.

A Figura 1.5 mostra um exemplo do Teorema de Helly para \mathbb{R}^2 . A Figura 1.6(a) mostra a necessidade dos conjuntos serem convexos (na figura, só um deles não é): a interseção de cada 3 conjuntos é não vazia, mas a interseção dos 4 conjuntos é vazia. Lembre que, no \mathbb{R}^2 , $d = 2$ e, portanto, a interseção de cada $d + 1 = 3$ conjuntos deveria ser suficiente. A Figura 1.6(b) mostra a necessidade de todas as interseções de $d + 1$ conjuntos serem não vazias: só uma interseção de 3 conjuntos é vazia e, por isso, a conclusão do Teorema de Helly falha.

O número de Helly $h\ell(S)$ de $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo com mais de um ponto é o menor inteiro $h \geq 2$ tal que toda família \mathcal{F} de subconjuntos convexos de S , em que cada h membros de \mathcal{F} têm um ponto em comum, satisfaz a propriedade de que todos os membros de \mathcal{F} têm um ponto em comum.

Com isso, o Teorema de Helly implica que $h\ell(S) \leq d + 1$ para todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo. Por exemplo, se $S \subseteq \mathbb{R}^d$ consiste de pontos colineares, então $h\ell(S) = 2$; se $S \subseteq \mathbb{R}^d$ consiste de pontos coplanares, então $h\ell(S) \leq 3$.

Segundo van de Vel (1993), foi provado de modo independente por Calder (1971), Berge e Duchet (1975) e Sierksma (1975) que o número de Helly de S também é o tamanho do maior subconjunto Helly independente $H \subseteq S$, em que dizemos que H é *Helly*

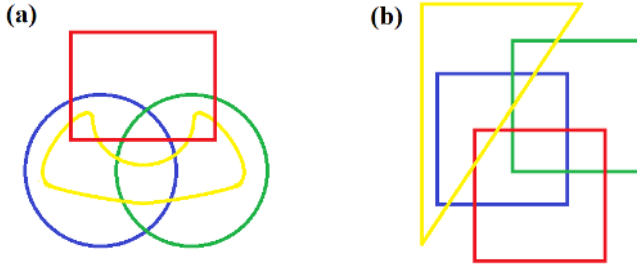


Figura 1.6: Exemplos do Teorema de Helly: casos não contemplados

independente se

$$\bigcap_{x \in H} \text{conv}(H \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

Por exemplo, todo conjunto Helly independente máximo de \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é formado por 2 pontos distintos (segmento), 3 pontos não colineares (triângulo) e 4 pontos não coplanares (tetraedro) respectivamente.

1.3 Posição Geral e Posição Convexa

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^d$ finito. Dizemos que S está em *posição geral* se S não contém 3 pontos colineares. O *número de posição geral* (*general position number*) de S , denotado por $\text{gp}(S)$, é definido como o maior subconjunto de S em posição geral. Quando $S = \{1, \dots, m\}^2 \subseteq \mathbb{N}^2$, esse problema se torna o clássico *No-Three-in-Line Problem* de Dudeney (1917)³, que continua em aberto para $m > 46$ (Flammenkamp 1998).

Dizemos que S está em *posição convexa* (ou que é *convexamente independente*) se S é o conjunto de pontos extremos de $\text{conv}(S)$, ou seja, nenhum $x \in S$ pertence a $\text{conv}(S \setminus \{x\})$. O famoso teorema abaixo é um dos pioneiros da Teoria de Ramsey: podemos encontrar subconjuntos em posição convexa de qualquer tamanho em conjuntos em posição geral suficientemente grandes.

Teorema 1.6 (Erdős e Szekeres 1935). *Seja $d \geq 2$. Para todo n , existe N tal que todo conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ em posição geral com $|S| \geq N$ possui um subconjunto $S' \subseteq S$ em posição convexa com $|S'| = n$.*

Esse resultado é uma generalização do *Happy Ending Theorem*, provado por Esther Klein (1933): todo conjunto de 5 pontos em posição geral no plano possui um subconjunto de 4 pontos em posição convexa (quadrilátero convexo). Erdős deu esse singelo nome

³Definido inicialmente como *Puzzle with Pawns* no livro de Dudeney (1917), apresentado pela prestigiada revista Nature no artigo “Amusements in Mathematics” (1917).

(*Teorema do Final Feliz*), pois essa pesquisa aproximou Esther e George Szekeres, que se casaram e viveram felizes para sempre: quase 70 anos de casamento que terminou em 2005 com a morte dos dois no mesmo dia, com apenas 1 hora de diferença, aos 95 anos de idade.

Com isso, define-se $ES_d(n)$ como sendo o menor inteiro N tal que todo conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ em posição geral com $|S| \geq N$ possui um subconjunto $S' \subseteq S$ em posição convexa com $|S'| = n$. Por exemplo, $ES_2(3) = 3$. O *Happy Ending Theorem* prova que $ES_2(4) = 5$. Sabe-se ainda que $ES_2(5) = 9$ e $ES_2(6) = 17$, sendo este último provado por Szekeres e Peters (2006) com auxílio do computador. Não se sabe o valor de $ES_2(n)$ para $n \geq 7$. Além disso, sabe-se que $ES_d(d+2) = d+3$ e que $ES_{d+1}(n) \leq ES_d(n)$ para todo $n, d \geq 2$.

Terminamos com um parâmetro introduzido por Jamison (1981) e usado recentemente em Convexidade de Grafos. O *posto* (*rank*, em inglês) de um conjunto finito $S \subseteq \mathbb{R}^d$, denotado por $\text{rk}(S)$, é definido como o maior subconjunto convexamente independente de S . Ou seja, o Teorema de Erdős e Szekeres (1935) prova exatamente que, para todo n , existe N tal que $\text{rk}(S) \geq n$ para todo conjunto finito $S \subseteq \mathbb{R}^d$ em posição geral com $|S| \geq N$.

1.4 Exercícios

Exerc. 1.1. Prove o Teorema 1.1. Mostre também que ele não funciona para união nem para a diferença de conjuntos.

Exerc. 1.2. Prove que todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ contém os pontos extremos de $\text{conv}(S)$.

Exerc. 1.3. Determine os conjuntos de \mathbb{R}^d com tempo de iteração 0, 1, 2 e 3.

Exerc. 1.4. Determine os conjuntos de \mathbb{R}^d com número de Carathéodory 0, 1 e 2.

Exerc. 1.5. Determine os conjuntos de \mathbb{R}^d com número de Radon 0, 1, 2 e 3.

Exerc. 1.6. Determine os conjuntos de \mathbb{R}^d com número de Helly 2, 3 e 4.

Exerc. 1.7. Determine os conjuntos de \mathbb{R}^d com posto (*rank*) 2 e 3.

Exerc. 1.8. Prove que as definições do número de Carathéodory são equivalentes.

Exerc. 1.9. Prove o *Happy Ending Theorem*: todo conjunto de 5 pontos em posição geral no plano possui um subconjunto de 4 pontos em posição convexa.

2

Convexidade em Grafos

Como dito no capítulo anterior, o estudo de convexidade aplicada a grafos é bem mais recente. Vamos começar definindo convexidades abstratas em conjuntos finitos na Seção 2.1 e, depois, definindo convexidades em grafos finitos na Seção 2.2. Em seguida, apresentamos as convexidades mais conhecidas em grafos na Seção 2.3, que são as convexidades baseadas em certos caminhos do grafo e, finalmente, mostramos na Seção 2.4 outros tipos de convexidades em grafos. Para maiores detalhes sobre grafos e suas notações, ver o Apêndice A.

2.1 Convexidades gerais sobre conjunto finitos

O Teorema 1.1 apresenta propriedades essenciais de conjuntos convexos em espaços euclidianos. Tais propriedades são usadas para definir convexidades abstratas em outras topologias. Ver, por exemplo, os livros de van de Vel (1993) e Pelayo (2013).

Seja V um conjunto finito não vazio. Uma *convexidade* \mathcal{C} sobre V é uma família de subconjuntos de V tal que $\emptyset, V \in \mathcal{C}$ e \mathcal{C} é fechada sob interseção¹ (Levi 1951). Ou seja, $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ implica $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}$. Dizemos que um membro de \mathcal{C} é um *conjunto convexo* em \mathcal{C} .

A definição acima é bastante abrangente e permite a existência de várias convexidades diferentes sobre um mesmo conjunto V . Por exemplo, considere $V = \{a, b\}$. Podemos

¹Para conjuntos infinitos, é necessária mais uma condição: a união infinita de conjuntos convexos aninhados é convexa.

ter as seguintes convexidades possíveis sobre V :

- $\mathcal{C}_1 = \{ \emptyset, \{a, b\} \}$;
- $\mathcal{C}_2 = \{ \emptyset, \{a\}, \{a, b\} \}$;
- $\mathcal{C}_3 = \{ \emptyset, \{b\}, \{a, b\} \}$;
- $\mathcal{C}_4 = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$.

Note que $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_4$ satisfazem a definição de convexidade sobre V .

Por outro lado, nem toda família de subconjuntos é uma convexidade. Por exemplo, $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ não é uma convexidade sobre $V = \{a, b, c\}$, pois a interseção de $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$ não pertence à família.

Com essa definição abrangente de convexidade abstrata sobre conjuntos finitos, podemos definir fecho convexo e pontos extremos como feito no Capítulo 1 para Geometria Euclidiana. Seja \mathcal{C} uma convexidade sobre um conjunto V finito não vazio. O fecho convexo de $S \subseteq V$ em \mathcal{C} (ou na convexidade \mathcal{C}) é o menor conjunto convexo $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ contendo S . É fácil verificar que $\text{conv}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é de fato um *operador de fecho (closure operator)* (Ver Exercício 2.1), ou seja, para todo $S, S' \subseteq V$:

- (i) $S \subseteq \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ (extensividade);
- (ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \text{conv}_{\mathcal{C}}(S) \subseteq \text{conv}_{\mathcal{C}}(S')$ (monotonicidade);
- (iii) $\text{conv}_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização²);
- (iv) $\text{conv}_{\mathcal{C}}(\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)) = \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ (idempotência).

Se $S \subseteq V$ é convexo em \mathcal{C} , dizemos que $x \in S$ é *ponto extremo* ou *vértice extremo* de S se $x \notin \text{conv}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\})$. Denotamos por $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(S)$ o conjunto de pontos extremos de S . Com essas definições de fecho convexo e pontos extremos, é fácil definir diretamente os conceitos de conjunto convexamente independente, posto (*rank*) e os números de Carathéodory, Radon e Helly da convexidade \mathcal{C} , análogos aos conceitos do Capítulo 1 (ver Exercício 2.2).

Dizemos que uma convexidade \mathcal{C} sobre V é uma *convexidade geométrica*³ se satisfaz a *Propriedade de Minkowski–Krein–Milman*: todo conjunto convexo é o fecho convexo de seus pontos extremos. No exemplo anterior com $V = \{a, b\}$, apenas a convexidade $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ não é geométrica; as demais possíveis convexidades $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ e \mathcal{C}_4 são geométricas (ver Exercício 2.3).

²De acordo com van de Vel (1993), alguns autores não consideram a propriedade de normalização na definição de operador de fecho. Seguimos a definição de van de Vel (ibid.).

³Também se diz que \mathcal{C} é um *antimatroide* ou é uma *geometria convexa*. Não confundir com a área de Geometria Convexa da Matemática, brevemente resumida no Capítulo 1.

Finalmente para poder definir tempo de iteração e número de posição geral, como feito no Capítulo 1, precisamos do conceito de *função de intervalo*. Segundo Calder (1971), dada uma função $I : \binom{V}{2} \rightarrow 2^V$ tal que $a, b \in I(\{a, b\})$, seja \mathcal{C} a família de conjuntos S tais que $I(S) = S$, em que $I(S) = \bigcup_{a,b \in S} I(\{a, b\})$. É fácil provar que \mathcal{C} é uma convexidade sobre V (ver prova do Lema 2.1). Diz-se que \mathcal{C} é a convexidade induzida pela função $I(\cdot)$.

Na próxima seção, veremos que as principais convexidades de grafos são de fato convexidades com funções de intervalo desse tipo, como a geodésica e a monofônica, que são convexidades baseadas em caminhos no grafo e, assim, são determinadas por pares de vértices. No entanto, recentemente foram estudadas algumas convexidades com noções mais ampliadas de intervalo⁴. Dizemos, então, que uma função $I : 2^V \rightarrow 2^V$ é uma *função de intervalo* sobre V se para todo $S, S' \subseteq V$:

- (i) $S \subseteq I(S)$ (extensividade);
- (ii) $S \subseteq S' \Rightarrow I(S) \subseteq I(S')$ (monotonicidade);
- (iii) $I(\emptyset) = \emptyset$ (normalização).

Note que só não é obrigada a satisfazer a propriedade (iv) de idempotência de fecho convexo. Dizemos que uma função de intervalo $I(\cdot)$ sobre V *induz* a família de conjuntos $S \subseteq V$ tais que $I(S) = S$. Note que essa definição de função de intervalo generaliza a de Calder (ibid.). Abaixo provamos que essa família induzida por $I(\cdot)$ é na verdade uma convexidade sobre V .

Lema 2.1. *Dado um conjunto finito V e uma função de intervalo $I(\cdot)$ sobre V , temos que a família \mathcal{C} de subconjuntos de V induzida por $I(\cdot)$ é uma convexidade.*

Demonstração. Pela condição (iii) de função de intervalo, temos que \emptyset está em \mathcal{C} . Pela condição (i), temos que $V \subseteq I(V) \subseteq V$ e portanto $I(V) = V$ está em \mathcal{C} . Finalmente, sejam S_1 e S_2 dois conjuntos em \mathcal{C} . Por definição, $I(S_1) = S_1$ e $I(S_2) = S_2$. Pela condição (ii), $I(S_1 \cap S_2) \subseteq I(S_1) = S_1$ e $I(S_1 \cap S_2) \subseteq I(S_2) = S_2$. Portanto, $I(S_1 \cap S_2) \subseteq S_1 \cap S_2$. Pela condição (i), $S_1 \cap S_2 \subseteq I(S_1 \cap S_2)$. Portanto, $I(S_1 \cap S_2) = S_1 \cap S_2$ e conseqüentemente $S_1 \cap S_2$ está em \mathcal{C} . Como \mathcal{C} é fechada sob interseção e $\emptyset, V \in \mathcal{C}$, então \mathcal{C} é uma convexidade. \square

Ou seja, toda função de intervalo induz uma única convexidade. Note ainda que toda convexidade pode ser induzida por uma (ou mais de uma) função de intervalo, sendo o próprio fecho convexo, por exemplo, uma função de intervalo possível. Quando na definição de uma convexidade \mathcal{C} é associada explicitamente uma função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ que a induz, diz-se que \mathcal{C} é uma *convexidade de intervalos*. Ou seja, define-se uma convexidade de intervalos \mathcal{C} em V informando explicitamente qual função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$

⁴Ver, por exemplo, a convexidade de Steiner (Cáceres, Márquez e Puertas 2008) e as convexidades de r -intervalo (Dourado, Rautenbach, dos Santos, Schäfer e Szwarcfiter 2013).

em V será considerada. As principais convexidades estudadas são convexidades de intervalo, ou seja, a função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ associada a cada uma delas é claramente definida. Formalmente, segundo van de Vel (1993), um espaço de convexidade é dado por um par (V, \mathcal{C}) , em que \mathcal{C} é uma convexidade sobre V , enquanto que um espaço de convexidade de intervalo é dado por um par $(V, I_{\mathcal{C}})$, sendo $I_{\mathcal{C}}$ uma função de intervalo sobre V , que, segundo o Lema 2.1, induz uma convexidade \mathcal{C} . Evitaremos essa terminologia e consideramos no restante do livro que toda convexidade \mathcal{C} é de intervalo e, portanto, tem um função de intervalo $I_{\mathcal{C}}$ associada.

Assim, como no Capítulo 1, note que o fecho convexo de um conjunto S pode ser obtido com a aplicação sucessiva da função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ até se obter um conjunto convexo, ou seja (Exercício 2.4):

$$\text{conv}_{\mathcal{C}}(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{\mathcal{C}}^k(S),$$

em que $I_{\mathcal{C}}^k(S)$ é a k -ésima iteração da função $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ sobre S , ou seja, $I_{\mathcal{C}}^0(S) = S$ e $I_{\mathcal{C}}^{k+1}(S) = I_{\mathcal{C}}(I_{\mathcal{C}}^k(S))$ para todo $k \geq 0$. Por isso, é comum dizermos que S *gera* (ou *ativa*, ou *infecta*) $I_{\mathcal{C}}(S)$ em 1 passo ou $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ em tantos passos na convexidade \mathcal{C} .

Como exemplo de função de intervalo, para $n \geq 2$, $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\mathcal{C} = \{\emptyset, [n]\}$, temos a função $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$, $I_{\mathcal{C}}([n]) = [n]$ e $I_{\mathcal{C}}(S) = S \cup \{\min([n] \setminus S)\}$, se $S \neq \emptyset$ e $S \neq [n]$.

Podemos, então, definir para uma convexidade \mathcal{C} sobre V os correspondentes dos parâmetros do Capítulo 1 que dependem da noção de intervalo, a saber, o tempo de iteração e o número de posição geral. O *tempo de iteração* de um subconjunto $S \subseteq V$ é o menor inteiro k tal que $I_{\mathcal{C}}^k(S) = \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$, ou seja, são necessárias k aplicações da função de intervalo até se obter o fecho convexo. Além disso, o *número de posição geral* $\text{gp}_{\mathcal{C}}(S)$ de um conjunto $S \subseteq V$ na convexidade \mathcal{C} é o tamanho do maior subconjunto de S em posição geral em \mathcal{C} , em que S está em *posição geral* em \mathcal{C} se S não contém 3 elementos x, y, z tais que $z \in I_{\mathcal{C}}(\{x, y\})$. Veja o Exercício 2.5 para um exemplo.

2.2 Convexidades em Grafos

Dado um grafo finito G , dizemos que \mathcal{C} é uma *convexidade no grafo* G se \mathcal{C} é uma convexidade de intervalos sobre $V(G)$. Com essa definição, todos os conceitos do Capítulo 1 se aplicam a qualquer convexidade de grafos: fecho convexo, pontos extremos, convexidade geométrica, posto (*rank*), números de Carathéodory, Radon e Helly, tempo de iteração e número de posição geral.

É importante destacar que todos os parâmetros numéricos listados acima se aplicam a subconjuntos $S \subseteq V(G)$. Podemos definir os mesmos parâmetros para todo o grafo G , tomando $S = V(G)$ (com exceção do tempo de iteração). Com isso temos os seguintes 5 parâmetros para uma convexidade \mathcal{C} qualquer sobre um grafo G : $\text{cth}_{\mathcal{C}}(G)$, $\text{rd}_{\mathcal{C}}(G)$, $\text{hl}_{\mathcal{C}}(G)$, $\text{rk}_{\mathcal{C}}(G)$ e $\text{gp}_{\mathcal{C}}(G)$.

Definimos ainda $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(G) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}(V(G))$: o conjunto de pontos extremos de $V(G)$ na convexidade \mathcal{C} .

Para terminar a lista dos parâmetros de convexidade mais estudados, restam 5 que são definidos diretamente no grafo G e não sobre o conjunto $S = V(G)$ (como os anteriores). O *número de convexidade* $\text{con}_{\mathcal{C}}(G)$ é o tamanho do maior conjunto convexo de G em \mathcal{C} diferente de $V(G)$. O *número de envoltória* $\text{hn}_{\mathcal{C}}(G)$ é o tamanho do menor conjunto de envoltória de G em \mathcal{C} , em que dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto de envoltória* (em inglês, *hull set*) de G em \mathcal{C} se $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$. O *número de intervalo* $\text{in}_{\mathcal{C}}(G)$ é o tamanho do menor conjunto de intervalo de G em \mathcal{C} , de forma que dizemos que S é um *conjunto de intervalo* (em inglês, *interval set*) de G em \mathcal{C} se $I_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$. O *tempo de iteração* $\text{ti}_{\mathcal{C}}(G)$ é o maior valor $\text{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$. Já o *tempo de percolação* $\text{tp}_{\mathcal{C}}(G)$ é o maior valor $\text{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$ que são conjuntos de envoltória de G em \mathcal{C} .

Com isso, chegamos à lista dos dez principais parâmetros de convexidade de grafos, que serão estudados e definidos mais formalmente em seções próprias. Omitiremos o subscrito \mathcal{C} quando a convexidade estiver clara no contexto.

1. $\text{hn}(G)$: Número de Envoltória;
2. $\text{in}(G)$: Número de Intervalo;
3. $\text{con}(G)$: Número de Convexidade;
4. $\text{cth}(G)$: Número de Carathéodory;
5. $\text{rd}(G)$: Número de Radon;
6. $\text{hl}(G)$: Número de Helly;
7. $\text{rk}(G)$: Posto (*rank*);
8. $\text{gp}(G)$: Número de Posição Geral;
9. $\text{ti}(G)$: Tempo de Iteração;
10. $\text{tp}(G)$: Tempo de Percolação.

É importante reforçar que todos esses dez parâmetros dependem da convexidade \mathcal{C} que está sendo considerada e que todos foram (e ainda são) alvo de pesquisa científica recente em Convexidade de Grafos. Referências bibliográficas serão dadas nas seções próprias de cada parâmetro nos capítulos seguintes. Uma vez definidos os parâmetros que serão estudados neste livro, vamos nos concentrar nas convexidades mais estudadas em grafos.

2.3 Convexidades de Caminhos em Grafos

Um modo usual de definir uma *convexidade* sobre um grafo G é fixando uma família \mathcal{P} de caminhos em G e obtendo a convexidade $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ a partir da função $I_{\mathcal{P}}(\cdot)$ sobre $V(G)$ tal que $I_{\mathcal{P}}(S)$ consiste do próprio conjunto S e mais todo vértice em qualquer caminho de \mathcal{P} com ambas as extremidades em S .

Lema 2.2. *Dado um grafo G e uma família \mathcal{P} de caminhos em G , temos que $I_{\mathcal{P}}(\cdot)$ é uma função de intervalo sobre $V(G)$, e $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ é uma convexidade em G .*

Demonstração. Exercício 2.6. \square

As convexidades de grafos mais estudadas são convexidades de caminhos:

- a *Convexidade Geodésica* (Harary e Nieminem 1981);
- a *Convexidade Monofônica* (Jamison 1982);
- a *Convexidade P_3* (Centeno, Dourado e Szwarcfiter 2009).

sendo \mathcal{P} respectivamente a família de toda geodésica (caminho mínimo), de todo caminho induzido e de todo P_3 (caminho de três vértices) do grafo.

Outras convexidades de caminhos em grafos são menos conhecidas, mas também foram alvo de pesquisa recente como

- a *Convexidade triangular* (Changat e Mathews 1999);
- a *Convexidade m^3* (Dragan, Nicolai e Brandstädt 1999);
- a *Convexidade P_3^** (Araújo, Sampaio e Szwarcfiter 2013).

em que \mathcal{P} é respectivamente a família de todo caminho $v_1 v_2 \dots$ sem arestas entre vértices v_i e v_j com $|j - i| > 2$, de todo caminho induzido com pelo menos 3 vértices e de todo P_3 induzido.

Um ponto a destacar é que, apesar das definições diferentes dessas convexidades, pode ocorrer de duas delas coincidirem em um mesmo grafo. Por exemplo, dizemos que um grafo é *distância hereditária* se todo caminho induzido é mínimo, como as árvores. Nessa classe de grafos, as convexidades geodésica e monofônica coincidem, pois todo caminho mínimo é induzido e, nessa classe, todo caminho induzido é mínimo. Ou seja, todo conjunto convexo na convexidade geodésica também é convexo na monofônica e vice-versa, implicando que os parâmetros de convexidade também irão coincidir nesses grafos.

Outro exemplo de *coincidência* são as convexidades P_3 e P_3^* na classe de grafos livres de triângulos, pois todo caminho P_3 será induzido. Também as convexidades geodésica e P_3^* coincidem na classe de grafos de diâmetro 2, pois toda geodésica entre vértices não adjacentes será um P_3 induzido. Além disso, as convexidades geodésica e P_3 também coincidirão em grafos de diâmetro 2 e livres de triângulo. O lema abaixo resume essas informações para uso futuro:

Lema 2.3. *As convexidades abaixo são equivalentes nos grafos destacados:*

- (a) *geodésica e monofônica em grafos distância hereditária;*
- (b) *geodésica e P_3^* em grafos de diâmetro 2;*
- (c) *geodésica e P_3 em grafos de diâmetro 2 e livres de triângulos;*
- (d) *P_3 e P_3^* em grafos livres de triângulo.*

Nesse sentido, Araújo, Sampaio e Szwarcfiter (2013) mostram uma redução simples e útil de um grafo qualquer G em um grafo G_u de modo que a convexidade geodésica de G_u é muito semelhante à convexidade P_3^* de G . Essa redução será útil no Capítulo 5.

Lema 2.4. *Dado um grafo G , seja G_u obtido de G incluindo um vértice universal u . Então, $S \subseteq V(G)$ é convexo em G na convexidade P_3^* se e só se $S \cup \{u\}$ é convexo em G_u na convexidade geodésica. Além disso, $S \subseteq V(G)$ é convexo em G_u na convexidade geodésica se e só se S é uma clique de G .*

Demonstração. Exercício 2.6. Note que G_u tem diâmetro 2 e, portanto, toda geodésica de G_u entre vértices não vizinhos é um P_3 induzido de G . \square

2.4 Convexidades de Grafos não baseadas em caminhos

Sem dúvida, as convexidades mais populares em grafos são convexidades de caminhos. Porém outros tipos de convexidade têm sido estudadas recentemente, como as convexidades baseadas em funções limiars no grafo e as convexidades baseadas em cópias induzidas de um dado grafo H , mostradas a seguir.

Primeiro mostramos como definir uma convexidade de grafos baseada em funções limiars (*threshold functions*). Como definido por Chen (2009), um *modelo TSS* (*Target Set Selection*) é dado por um grafo G e uma função limiar $\tau : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Com isso, definimos o τ -intervalo $I_\tau(S)$ de $S \subseteq V(G)$ como o próprio S mais todo vértice v fora de S que tem pelo menos $\tau(v)$ vizinhos em S . Com isso, seja \mathcal{C}_{\ll}^{τ} a família de subconjuntos S de $V(G)$ tal que $I_\tau(S) = S$, ou seja, todo vértice v fora de S possui menos de $\tau(v)$ vizinhos em S . Como exemplo, note que a Convexidade P_3 da seção anterior, que é uma das mais pesquisadas em Convexidades de Grafos, pode ser definida com base no modelo TSS cuja função limiar $\tau(v) = 2$ para todo vértice v de G .

A Seção 9.1 mostra mais detalhes sobre convexidades desse tipo. Modelos TSS são usados para representar processos de difusão em grafos, como propagação de informação, maximização da influência em redes sociais, contaminação de doenças, entre outros.

Lema 2.5. *Dado um grafo G com $V(G) \neq \emptyset$ e uma função limiar $\tau : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, temos que \mathcal{C}_τ é uma convexidade em G se e só se $\tau(v) > 0$ para todo $v \in V(G)$.*

Demonstração. Exercício 2.6. Dica: provar que $I_\tau(\cdot)$ é uma função de intervalo se e só se $\tau(v) > 0$ para todo $v \in V(G)$. \square

A seguir, mostramos outro modo de definir convexidades em um grafo G a partir de cópias induzidas de um grafo dado H . Definimos o H -intervalo $I_H(S)$ de $S \subseteq V(G)$ como o próprio S mais todo vértice v fora de S tal que $S' \cup \{v\}$ induz um subgrafo H em G para algum $S' \subseteq S$ (claramente $|S'| = |V(H)| - 1$). Com isso, seja \mathcal{C}_H a família de subconjuntos S de $V(G)$ tal que $I_H(S) = S$, ou seja, nenhum vértice fora de S induz H com algum subconjunto de S .

Lema 2.6. *Seja H um grafo com $|V(H)| \geq 2$. Dado um grafo G com $V(G) \neq \emptyset$, temos que \mathcal{C}_H é uma convexidade em G .*

Demonstração. Exercício 2.6. Dica: provar que $I_H(\cdot)$ é uma função de intervalo se $|V(H)| \geq 2$. \square

A convexidade \mathcal{C}_H é chamada *convexidade H -livre*. A Seção 4.10 mostra que a convexidade H -livre é geométrica em um grafo G se e só se G é livre de H induzido.

2.5 Exercícios

Exerc. 2.1. Prove que o fecho convexo $\text{conv}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ de uma convexidade \mathcal{C} sobre um conjunto V é de fato um operador de fecho (closure operator).

Exerc. 2.2. Forneça definições de conjunto convexamente independente, posto (rank) e os números de Carathéodory, Radon e Helly de uma convexidade \mathcal{C} sobre um conjunto finito V , análogas as do Capítulo 1.

Exerc. 2.3. Enumere todas as convexidades possíveis em $V = \{a, b\}$ e determine as que são geométricas. Faça o mesmo para $V = \{a, b, c\}$.

Exerc. 2.4. Dada uma convexidade \mathcal{C} de intervalo sobre V , prove:

- (a) $S \subseteq I_{\mathcal{C}}^k(S) \subseteq \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$, para todo $S \subseteq V$ e $k \geq 0$;
- (b) $\text{conv}_{\mathcal{C}}(I_{\mathcal{C}}^k(S)) = \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$, para todo $S \subseteq V$ e $k \geq 0$;
- (c) $I_{\mathcal{C}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{\mathcal{C}}^k(S)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{\mathcal{C}}^k(S)$, para todo $S \subseteq V$;
- (d) $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{\mathcal{C}}^k(S)$, para todo $S \subseteq V$.

Exerc. 2.5. Seja $\mathcal{C} = \{\emptyset, [n]\}$ a convexidade de intervalos sobre $[n]$ cuja função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é definida como: $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$, $I_{\mathcal{C}}([n]) = [n]$ e $I_{\mathcal{C}}(S) = S \cup \{\min([n] \setminus S)\}$, se $S \neq \emptyset$ e $S \neq [n]$. Determine o tempo de iteração e o número de posição geral de $[n]$ nessa convexidade.

Exerc. 2.6. Prove os Lemas 2.2 a 2.6.

Exerc. 2.7. Enuncie e prove uma modificação do Lema 2.6 no caso em que H consiste de 1 vértice apenas.

3

Parâmetros de Convexidade

Neste capítulo, nós nos aprofundamos um pouco mais nos dez parâmetros mais estudados em convexidade em grafos, listados na Seção 2.2. Dedicamos uma subseção a cada um deles onde relembramos sua definição, listamos resultados da literatura e mostramos exemplos para grafos simples, determinando seus valores nas convexidades mais conhecidas: geodésica, monofônica e P_3 .

Lembre que as convexidades geodésica, monofônica e P_3 estão associadas a caminhos mínimos, caminhos induzidos e caminhos P_3 dentro do grafo respectivamente. Como vimos no Lema 2.3, essas convexidades podem coincidir em certas classes de grafos, como as convexidades geodésica e monofônica nos grafos distância-hereditária, nas árvores e no grafo da Figura 3.2.

Vamos assumir que todo grafo G é finito com $V(G) \neq \emptyset$. Para maiores detalhes sobre grafos e suas notações, ver o Apêndice A. Entre os grafos simples constantemente citados aqui, destacam-se os grafos completos K_n , os caminhos P_n , os ciclos C_n e as árvores (grafos acíclicos). Sempre usamos n para o número de vértices do grafo considerado. Sabe-se, por exemplo, que $K_3 = C_3$, que toda árvore possui pelo menos 2 folhas, as quais são vértices de grau 1, e que P_n é uma árvore com exatamente duas folhas.

Nas seções seguintes, utilizamos os subscritos g , m e p_3 para diferenciar os parâmetros. Por exemplo, $hl_g(G)$, $hl_m(G)$ e $hl_{p_3}(G)$ se referem ao número de Helly do grafo G nas convexidades geodésica, monofônica e P_3 respectivamente. Quando não usarmos o subscrito, estaremos nos referindo genericamente ao parâmetro, que dependerá da convexidade considerada.

3.1 Número de Envoltória

O número de envoltória $hn(G)$ é o tamanho do menor conjunto de envoltória de G , ou seja, é o tamanho do menor conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $\text{conv}(S) = V(G)$. Como dito acima, essa definição depende da convexidade considerada (note que não há subscrito). Não vamos repetir isso nas próximas seções.

O número de envoltória é um dos parâmetros de convexidade mais estudados e foi introduzido por Everett e Seidman (1985) na convexidade geodésica. Curiosamente não foi o primeiro a ser estudado. Por exemplo, o tempo de iteração foi introduzido antes (Harary e Nieminen 1981), sendo um dos menos investigados. Existem vários resultados de complexidade computacional para o número de envoltória na literatura como, por exemplo, a prova de que é NP-difícil na convexidade P_3 mesmo em subgrafos de grades e APX-difícil nas convexidades P_3 e geodésica (Araújo, Sampaio, dos Santos et al. 2018).

Lembre que $\text{Ext}(G)$ é o conjunto de pontos extremos de $V(G)$. Claramente todo vértice $v \in \text{Ext}(G)$ deve estar em qualquer conjunto de envoltória, pois $V(G) \setminus \{v\}$ não é conjunto de envoltória já que $v \notin \text{conv}(V(G) \setminus \{v\})$. Consequentemente $hn(G) \geq |\text{Ext}(G)|$.

O lema simples abaixo mostra que todo vértice simplicial, ou seja, cuja vizinhança é uma clique deve estar em qualquer conjunto de envoltória em duas convexidades importantes. Na convexidade P_3 sobre o grafo completo K_n para $n \geq 2$, é fácil ver que $hn_{P_3}(K_n) = 2$.

Lema 3.1 (Everett e Seidman 1985). *Nas convexidades geodésica e monofônica, um vértice é ponto extremo se e só se é simplicial (a vizinhança forma uma clique). Consequentemente $hn_g(K_n) = hn_m(K_n) = n$.*

Demonstração. Exercício 3.1. Todo vértice é simplicial no grafo completo K_n . \square

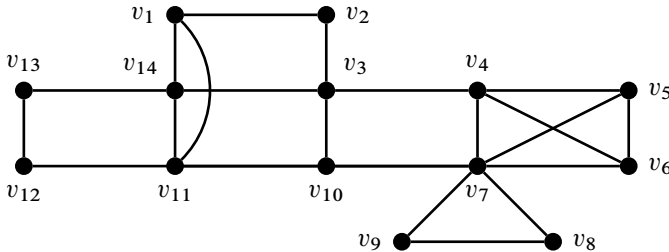


Figura 3.1: Grafo G_1 usado como exemplo nas seções deste capítulo

Aplicando o Lema 3.1 ao grafo G_1 da Figura 3.1, temos que os vértices simpliciais v_5, v_6, v_8 e v_9 de G_1 devem estar em qualquer conjunto de envoltória nas convexidades geodésica e monofônica. Na convexidade geodésica, $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ é um conjunto de envoltória de G_1 , de tamanho 6, e não existe um menor, e portanto $hn_g(G) = 6$. Na convexidade monofônica, $\{v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ é um conjunto de envoltória de G_1 , de tamanho

5, e não existe um menor, e portanto $hn_m(G) = 5$. Na convexidade P_3 , $\{v_5, v_8, v_{12}, v_{14}\}$ é um conjunto de envoltória de G_1 de tamanho 4, não existindo um menor e, portanto, $hn_{p_3}(G) = 4$ (Exercício 3.2).

De modo semelhante, os vértices simpliciais de uma árvore são exatamente as suas folhas. Além disso, todo vértice não folha está em uma geodésica entre duas folhas. Portanto:

Lema 3.2. *Para toda árvore T , $hn_g(T) = hn_m(T) = \text{número de folhas de } T$.*

Todo caminho P_n com $n \geq 2$ é uma árvore com 2 folhas e, portanto, $hn_g(P_n) = hn_m(P_n) = 2$. Em um ciclo C_n com $n \geq 3$ e vértices $v_1 v_2 \dots v_n$, não há vértices simpliciais, mas é fácil ver que quaisquer 2 vértices não adjacentes formam um conjunto de envoltória na convexidade monofônica. Assim $hn_m(C_3) = 3$ e $hn_m(C_n) = 2$ para $n \geq 4$. Além disso, na convexidade geodésica, 2 vértices são suficientes se n é par e 3 vértices são necessários e suficientes se n é ímpar. Assim $hn_g(C_n) = 2$ se n é par e $hn_g(C_n) = 3$ se n é ímpar.

Na convexidade P_3 , deixamos como Exercício 3.3 a determinação de $hn_{p_3}(T)$ para qualquer árvore T (veja o Algoritmo TSS-SIZE-TREE da Seção 9.1). O lema abaixo lida com caminhos e ciclos na convexidade P_3 .

Lema 3.3. *Na convexidade P_3 , todo conjunto de envoltória do caminho P_n ou do ciclo C_n , com vértices v_1, \dots, v_n , deve conter v_i ou v_{i+1} para todo $i \in [n]$. Portanto $hn_{p_3}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ e $hn_{p_3}(C_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$.*

Demonstração. Exercício 3.4. \square

Para terminar, note que o grafo G_2 da Figura 3.2 não possui vértice simplicial e que os dois vértices cinzas formam um conjunto de envoltória nas 3 convexidades: geodésica, monofônica e P_3 . Portanto $hn_g(G_2) = hn_m(G_2) = hn_{p_3}(G_2) = 2$. Além disso, no grafo G_3 da Figura 3.2, os vértices com rótulo 0 e 15 são simpliciais e formam um conjunto de envoltória nas convexidades geodésica e monofônica. Portanto $hn_g(G_3) = hn_m(G_3) = 3$. Na convexidade P_3 , os vértices com rótulo 0 formam um conjunto de envoltória e, portanto, $hn_{p_3}(G_3) = 2$.

3.2 Números de Intervalo e de Convexidade

Número de Intervalo

O número de intervalo $in(G)$ é o tamanho do menor conjunto de intervalo do grafo G . Basicamente são conjuntos de envoltória com tempo de iteração 1. Como um conjunto de intervalo também é um conjunto de envoltória, concluímos que $hn(G) \leq in(G)$.

O número de intervalo foi introduzido por Harary, Loukakis e Tsouros (1993), na convexidade geodésica, com o nome de *número geodésico*. Na convexidade monofônica, o número de intervalo também é chamado de *número monofônico* (Pelayo 2013).

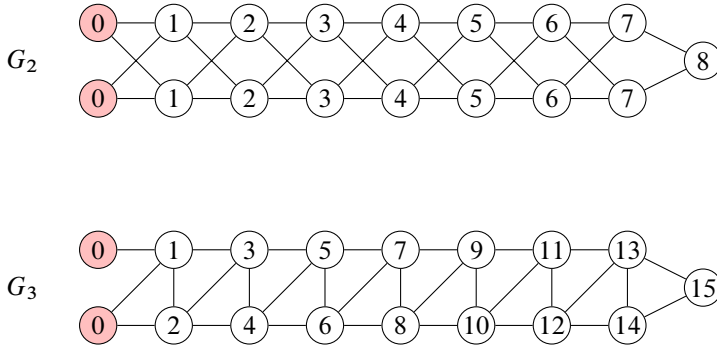


Figura 3.2: Grafos G_2 e G_3 usados como exemplos neste capítulo. Os números indicam o tempo de iteração na convexidade P_3 de cada vértice, começando pelos cinzas. Note que G_2 é distância-hereditária, mas G_3 não é.

Para o grafo completo K_n com pelo menos $n \geq 2$ vértices, é fácil ver que $\text{in}_g(K_n) = \text{in}_m(K_n) = n$ e que $\text{in}_{p_3}(K_n) = 2$.

Para o grafo G_1 da Figura 3.1, $\text{in}_g(G_1) = \text{hn}_g(G_1) = 6$ e $\text{in}_m(G_1) = \text{hn}_m(G_1) = 5$. Na convexidade P_3 , é fácil verificar que $\{v_2, v_4, v_7, v_8, v_{11}, v_{13}\}$ é um conjunto de intervalo de G_1 de tamanho 6, não existindo um menor e, portanto, $\text{in}_{p_3}(G_1) = 6 > \text{hn}_{p_3}(G_1) = 4$.

Para o grafo G_2 da Figura 3.2, nas convexidades geodésica e monofônica, é fácil verificar que os vértices com rótulo 0 mais o vértice de rótulo 8 formam um conjunto de intervalo de tamanho 3, não existindo um menor e, portanto, $\text{in}_g(G_2) = \text{in}_m(G_2) = 3$, sendo maior que $\text{hn}_g(G_2) = \text{hn}_m(G_2) = 2$. Na convexidade P_3 , é fácil verificar que os seis vértices rotulados com 1, 4 e 7 formam um conjunto de intervalo de G_2 , não existindo um menor e, portanto, $\text{in}_{p_3}(G_2) = 6$, que é bem maior que $\text{hn}_{p_3}(G_2) = 2$.

O grafo G_3 da Figura 3.2 possui 3 vértices simpliciais (com rótulos 0 e 15) que formam conjuntos de intervalo nas convexidades geodésica e monofônica, e, portanto $\text{in}_g(G_3) = \text{in}_m(G_3) = 3$. Na convexidade P_3 , é fácil verificar que os sete vértices com rótulos múltiplos de 3 formam um conjunto de intervalo de G_3 , não existindo um menor e, portanto, $\text{in}_{p_3}(G_3) = 7$, que é bem maior que $\text{hn}_{p_3}(G_3) = 2$.

Para árvores e ciclos nas convexidades geodésica e monofônica, verifica-se que conjuntos de envoltória também são conjuntos de intervalo, pois seu tempo de iteração é 1. Portanto $\text{in}_g(T)$ e $\text{in}_m(T)$ são iguais ao número de folhas para toda árvore T . Além disso, $\text{in}_g(C_n) = \text{hn}_g(C_n)$ e $\text{in}_m(C_n) = \text{hn}_m(C_n)$. Veja Seção 3.1 para os valores exatos em ciclos.

Número de Convexidade

O *número de convexidade* $\text{con}(G)$ é o tamanho do maior conjunto convexo próprio do grafo G , ou seja, diferente de $V(G)$. Por outro lado, $n - \text{con}(G)$ representa o tamanho do menor conjunto *coconvexo* (cujo complemento é convexo), basicamente um conjunto de vértices inalcançáveis pelos demais. Esse parâmetro foi introduzido por Chartrand, Wall e Zhang (2002).

Existem vários resultados de complexidade computacional para o número de convexidade. Por exemplo, a prova de que nas convexidades P_3 e geodésica, além de ser NP-difícil, é altamente inaproximável, ou seja, não possui algoritmo polinomial com fator de aproximação $n^{1-\varepsilon}$ para nenhum $\varepsilon > 0$, a menos que $P=NP$ (Coelho, Dourado e Sampaio 2015).

Nas convexidades geodésica e monofônica, temos, pelo Lema 3.1, que $\text{con}(G) = n - 1$ se e somente se G tem vértice simplicial (basta tomar todos os vértices exceto um vértice simplicial). Portanto, para o grafo completo, $\text{con}_g(K_n) = \text{con}_m(K_n) = n - 1$. Além disso, para o grafo G_1 da Figura 3.1, $\text{con}_g(G_1) = \text{con}_m(G_1) = 14 - 1 = 13$, pois G_1 tem vértice simplicial.

Na convexidade P_3 , um vértice é extremo se, e só se, tem grau 1, ou seja, todo vértice de grau 1 está em todo conjunto de envoltória. Logo $\text{con}_{p_3}(G) = n - 1$ se e somente se G tem vértice de grau 1 (basta tomar todos os vértices exceto um vértice de grau 1). Portanto $\text{con}_{p_3}(G_1) \leq 14 - 2 = 12$, pois G_1 não tem vértice de grau 1. Como $\{v_{12}, v_{13}\}$ é um conjunto coconvexo, então $\text{con}_{p_3}(G) = 12$. Por outro lado, no grafo completo, $\text{con}_{p_3}(K_n) = 1$.

Pelo exposto acima, toda árvore T com pelo menos 2 vértices tem o número de convexidade igual a $n - 1$ nas três convexidades, ou seja, $\text{con}_g(T) = \text{con}_m(T) = \text{con}_{p_3}(T) = n - 1$, pois basta tomar todos os vértices exceto uma folha, que tanto é simplicial como tem grau 1.

Em um ciclo C_n com $n \geq 3$, já vimos que, na convexidade monofônica, quaisquer 2 vértices não adjacentes formam um conjunto de intervalo. Portanto $\text{con}_m(C_n) = 2$ se $n \geq 3$. Na convexidade geodésica, é fácil ver que $\text{con}_g(C_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (todos os vértices em menos da metade do ciclo). Na convexidade P_3 , dois vértices adjacentes formam um conjunto coconvexo em C_n para $n \geq 4$ e, portanto, $\text{con}_{p_3}(C_n) = n - 2$ se $n \geq 4$ e $\text{con}_{p_3}(C_3) = 1$.

Com relação ao grafo G_2 da Figura 3.2, deixaremos como Exercício 3.5 determinar o valor de $\text{con}(G_2)$ nas convexidades geodésica, monofônica e P_3 . Uma observação importante é que quaisquer dois vértices com mesmo rótulo em G_2 formam um conjunto de envoltória e, portanto, nenhum conjunto convexo próprio pode conter dois vértices com mesmo rótulo.

Sobre o grafo G_3 da Figura 3.2, o único vértice de grau 1 forma um conjunto coconvexo nas 3 convexidades e, portanto, $\text{con}_m(G_3) = \text{con}_g(G_3) = \text{con}_{p_3}(G_3) = n - 1 = 16$.

3.3 Tempos de Iteração e de Percolação

Os dois parâmetros desta seção dependem da seguinte definição importante: dado um grafo G e uma convexidade sobre G , o *tempo de iteração* de um conjunto $S \subseteq V(G)$, denotado por $\text{ti}(S)$, é definido como o menor inteiro k tal que $I^k(S) = \text{conv}(S)$, ou seja, são necessárias k aplicações da função de intervalo da convexidade até se obter o fecho convexo de S .

O *tempo de iteração* $\text{ti}(G)$ é o maior valor $\text{ti}(S)$ entre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$. Esse parâmetro foi introduzido por Harary e Nieminem (1981) no primeiro artigo de convexidade sobre grafos gerais, focado na convexidade geodésica. Em Parvathy e Vijayakumar (1998), foram obtidos limitantes para o tempo de iteração geodésico. Dourado, Oliveira, Protti e Rautenbach (2016) obtiveram um algoritmo com complexidade $O(n^3m)$ para os grafos distância-hereditária na convexidade geodésica. Moscarini (2020) apresentou um algoritmo de mesma complexidade para a classe contendo os grafos em que as convexidades geodésica e monofônica coincidem. Recentemente Araújo, Dourado et al. (2023) provaram que o tempo de iteração é NP-difícil nas convexidades P_3 e geodésica.

O *tempo de percolação* $\text{tp}(G)$ é o maior valor $\text{ti}(S)$ entre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$ que são conjuntos de envoltória de G na convexidade considerada. O tempo de percolação foi introduzido por Benevides e Przykucki (2013) para resolver um problema proposto pelo matemático Béla Bollobás na convexidade P_3 . Nesta convexidade, Benevides, Campos et al. (2015) provaram que o tempo de percolação é NP-difícil mesmo em grafos planares e que é NP-completo decidir se $\text{tp}_{P_3}(G) \geq 4$. Na convexidade geodésica, Benevides, Campos et al. (2016) obtiveram um algoritmo polinomial em grafos distância-hereditária e provaram que é NP-completo decidir se $\text{tp}_g(G) \geq 2$ mesmo em grafos bipartidos.

Considere inicialmente os grafos G_2 e G_3 da Figura 3.2. É fácil ver diretamente na figura que $\text{ti}(G_2) = \text{tp}(G_2) = 8$ nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3 . Além disso, $\text{ti}_{P_3}(G_3) = \text{tp}_{P_3}(G_3) = 15$. Os conjuntos com esses tempos de iteração são indicados em cinza na figura. Note que esses conjuntos são também conjuntos de envoltória.

Nesses exemplos, os parâmetros de tempo têm o mesmo valor, mas podem ser bem diferentes em outros grafos. Como exemplo, considere o grafo G'_2 da Figura 3.3 obtido a partir do grafo G_2 da Figura 3.2 com a inclusão de três novos vértices (em preto). Observe que os vértices em cinza não formam em G'_2 um conjunto de envoltória, mas continuam com o mesmo tempo de iteração 8 e, por isso, $\text{ti}(G'_2) = 8$ nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3 .

Com relação ao tempo de percolação, os vértices pretos de grau 1 precisam estar em todo conjunto de envoltória das três convexidades. Como esses dois vértices de grau 1 formam também um conjunto de intervalo nas convexidades geodésica e monofônica, então $\text{tp}_m(G'_2) = \text{tp}_g(G'_2) = 1$. Com isso, vemos que esses parâmetros podem diferenciar bastante. Por outro lado, na convexidade P_3 , continuarão sendo iguais, pois os dois vértices de grau 1 juntamente com os dois em cinza formam um conjunto de envoltória e tem o mesmo tempo de iteração. Consequentemente $\text{tp}_{P_3}(G'_2) = \text{ti}_{P_3}(G'_2) = 8$.

Com relação aos grafos mais simples, não é difícil notar que os tempos de iteração

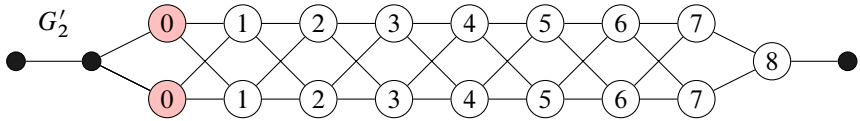


Figura 3.3: Grafo G'_2 usado como exemplo para mostrar a diferença entre o tempo de iteração e o tempo de percolação. Os números indicam o tempo de iteração na convexidade P_3 de cada vértice, começando pelos cinzas. Note que os vértices cinzas não formam um conjunto de envoltória.

e de percolação serão iguais nos grafos K_n , P_n e C_n . Seja $n \geq 4$. Nos grafos completos, $ti_{P_3}(K_n) = tp_{P_3}(K_n) = 1$ e, nas convexidades geodésica e monofônica, $ti(K_n) = tp(K_n) = 0$. Nos caminhos e nos ciclos, temos que os tempos de iteração e de percolação são iguais a 1 nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3 .

Também não é difícil ver que, nas árvores com mais de 2 vértices, os tempos de iteração e de percolação são iguais a 1 nas convexidades geodésica e monofônica. Com relação às árvores na convexidade P_3 , a situação é diferente e os parâmetros podem destoar bastante. A Figura 3.4 mostra, para cada $n \geq 1$, uma árvore com tempo de iteração n e tempo de percolação 1.

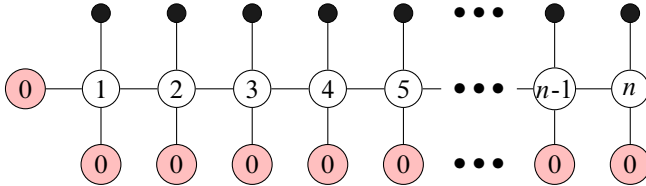


Figura 3.4: Árvore com tempo de iteração n e tempo de percolação 1 na convexidade P_3 . Os números nos vértices representam o tempo de iteração iniciando nos vértices cinzas.

Deixamos como Exercício 3.6 determinar o tempo de iteração e o tempo de percolação nos grafos G_1 e G_3 nas convexidades geodésica e monofônica.

3.4 Números de Carathéodory, Radon e Helly

Os parâmetros desta seção são bastante estudados na literatura e suas definições foram inspiradas nos teoremas clássicos de Carathéodory, Radon e Helly, apresentados na Seção 1.2. Coelho, Dourado e Sampaio (2015) e Dourado e da Silva (2017) provaram que, além de serem NP-difíceis, esses três parâmetros são altamente inaproximáveis nas convexidades P_3 e geodésica. Ou seja, não possuem algoritmo polinomial com fator de aproximação $n^{1-\varepsilon}$ para nenhum $\varepsilon > 0$, a menos que $P=NP$.

Número de Carathéodory

O número de Carathéodory de um grafo G , denotado por $\text{cth}(G)$, é o menor inteiro $r \geq 0$ tal que, para todo subconjunto $S \subseteq V(G)$ e todo vértice $u \in \text{conv}(S)$, existe um subconjunto $F \subseteq S$ com $|F| \leq r$ e $u \in \text{conv}(F)$. Essa é a definição mais próxima do clássico Teorema 1.3 de Carathéodory (1911).

Alternativamente, conforme van de Vel (1993), não é difícil provar que o número de Carathéodory de G também é o tamanho do maior subconjunto *Carathéodory independente*¹ $S \subseteq V(G)$, que são os conjuntos tais que $\text{conv}(S) \neq \bigcup_{u \in S} \text{conv}(S \setminus \{u\})$.

Note que como $\text{conv}(S) \supseteq \text{conv}(S \setminus \{u\})$ para todo $u \in S$, então $\text{conv}(S) \supseteq \bigcup_{u \in S} \text{conv}(S \setminus \{u\})$. Note ainda que, na primeira definição, o número de Carathéodory é um parâmetro de minimização e que, na segunda definição, é um parâmetro de maximização. Deixamos como Exercício 3.7 provar que essas definições são equivalentes também em convexidade abstrata.

Um exemplo de conjunto Carathéodory independente máximo na convexidade P_3 é o conjunto S das folhas de uma árvore binária completa B . Em cada iteração da função de intervalo $I_{p_3}(\cdot)$, começando por S , um nível de B será gerado no sentido das folhas para a raiz, até que a raiz seja gerada por último. Ou seja, $\text{conv}_{p_3}(S)$ contém a raiz de B , mas $\bigcup_{u \in S} \text{conv}_{p_3}(S \setminus \{u\})$ não contém a raiz, significando que todas as folhas são necessárias para gerar a raiz. Assim $\text{cth}_{p_3}(B) = \text{hn}_{p_3}(B)$ é o número de folhas de B .

Para a convexidade geodésica, o Lema 2.4 obtém o grafo B_u adicionando um vértice universal u a B . A aplicação de $I_g(\cdot)$ em B_u , a partir do conjunto S das folhas de B , será quase igual ao mostrado em B para a convexidade P_3 , com a raiz sendo gerada por último. A diferença é que u será gerado na primeira iteração, mas, como é universal, u não ajuda a gerar outros vértices na convexidade geodésica. Assim $\text{cth}_g(B_u) = \text{hn}_g(B_u)$ é o número de folhas de B .

Deixamos como Exercício 3.8 obter, na convexidade monofônica, um grafo com número de Carathéodory k para qualquer inteiro positivo k .

Considere os grafos K_n , P_n e C_n para $n \geq 4$. Nos grafos completos, $\text{cth}_g(K_n) = \text{cth}_m(K_n) = 1$ e $\text{cth}_{p_3}(K_n) = 2$. Nos ciclos, $\text{cth}_g(C_n) = \text{cth}_m(C_n) = \text{cth}_{p_3}(C_n) = 2$. Nos caminhos, $\text{cth}_g(P_n) = \text{cth}_m(P_n) = \text{cth}_{p_3}(P_n) = 2$.

Finalmente, para o grafo G_1 da Figura 3.1 com $S = \{v_{11}, v_{13}\}$ na convexidade geodésica, note que $\bigcup_{u \in S} \text{conv}_g(S \setminus \{u\}) = \{v_{11}, v_{13}\}$ e $\text{conv}_g(S) = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$. Ou seja, $\{v_{11}, v_{13}\}$ é Carathéodory independente na convexidade geodésica. Além disso, nota-se que todo conjunto com 3 ou mais vértices é Carathéodory dependente e, portanto, $\text{cth}_g(G_1) = 2$ (Exercício 3.9). Ademais todo conjunto Carathéodory dependente de G_1 na convexidade geodésica também será na convexidade monofônica e, portanto, $\text{cth}_m(G_1) = 2$. Na convexidade P_3 sobre G_1 , temos $\text{cth}_{p_3}(G_1) = 4$. Como exemplos de conjuntos Carathéodory independente máximos na convexidade P_3 , temos $\{v_1, v_2, v_5, v_{11}\}$ e $\{v_6, v_9, v_{12}, v_{14}\}$. Deixamos como Exercício 3.10 mostrar que todo conjunto com 5 ou

¹Termo usado por van de Vel (1993) e Bryant, Dawson e Perfect (1978). Esses conjuntos também são chamados de *irredundantes* por Pelayo (2013) e Duchet (1988).

mais vértices de G_1 é Carathéodory dependente na convexidade P_3 .

Deixamos como Exercício 3.11 determinar $\text{cth}(G_2)$ e $\text{cth}(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

Número de Radon

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *Radon dependente* se existe uma partição de S em dois conjuntos S_1 e S_2 satisfazendo $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$; sendo *Radon independente* caso contrário. O *número de Radon* $\text{rd}(G)$ é o tamanho do maior conjunto Radon independente² de G . É fácil ver que a propriedade Radon independente é hereditária, ou seja, se $A \subseteq B$ e B é Radon independente, então A também é Radon independente.

Note inicialmente que toda clique é um conjunto Radon independente nas convexidades geodésica e monofônica. Portanto, no grafo completo, $\text{rd}_g(K_n) = \text{rd}_m(K_n) = n$. Além disso, é fácil ver que $\text{rd}_{p_3}(K_n) = 2$ para todo $n \geq 3$. Além disso, nos caminhos com $n \geq 3$ vértices, $\text{rd}_m(P_n) = \text{rd}_g(P_n) = 2$ e $\text{rd}_{p_3}(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, pois o conjunto não pode ter um P_3 . Finalmente, nos ciclos com $n \geq 4$ vértices, $\text{rd}_m(C_n) = 2$, $\text{rd}_g(C_n) = 3$ se $n \geq 5$, $\text{rd}_g(C_4) = 2$ e $\text{rd}_{p_3}(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

Agora considere o grafo G_1 da Figura 3.1. Como a clique máxima de G_1 tem 4 vértices, temos que $\text{rd}_g(G_1) \geq 4$. Deixamos como Exercício 3.12 mostrar que todo conjunto com 5 vértices é Radon dependente na convexidade geodésica. Portanto $\text{rd}_g(G_1) = 4$. Observe que todo conjunto Radon dependente na convexidade geodésica também é Radon dependente na convexidade monofônica. Assim temos que $\text{rd}_m(G_1) = 4$. Note que $\{v_2, v_8, v_9, v_{12}, v_{14}\}$ é Radon independente na convexidade P_3 , logo temos que $\text{rd}_{p_3}(G_1) \geq 5$. Deixamos como Exercício 3.13 mostrar que todo conjunto com 6 vértices é Radon dependente na convexidade P_3 . Portanto $\text{rd}_{p_3}(G_1) = 5$.

Deixamos como Exercício 3.14 determinar $\text{rd}(G_2)$ e $\text{rd}(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

Finalmente considere uma árvore completamente binária B . Note que o conjunto S das folhas de B é Radon independente, já que qualquer partição geraria subárvores diferentes. Como não há conjunto Radon independente maior em B (Exercício 3.15), então $\text{rd}(B)$ é igual ao número de folhas.

Número de Helly

De acordo com van de Vel (ibid.), o *número de Helly* $\text{hl}(G)$ é o tamanho do maior subconjunto *Helly independente* $S \subseteq V(G)$, que são os conjuntos tais que $\bigcap_{v \in S} \text{conv}(S \setminus \{v\}) = \emptyset$.

Note que a propriedade Helly independente é hereditária, ou seja, se $A \subseteq B$ e B é Helly independente, então A também é Helly independente. Note ainda que \emptyset e $\{v\}$ são Helly independentes para todo $v \in V(G)$. Ou seja, se $|V(G)| \leq 1$, então $\text{hl}(G) = |V(G)|$. O

²Segundo van de Vel (1993), alguns autores definem o número de Radon como o 1 mais o tamanho do maior Radon independente. Seguimos o padrão de van de Vel (ibid.).

Teorema 3.2 mostra que $hl(G) \geq 2$ para todo grafo G com pelo menos dois vértices nas principais convexidades de grafos³.

De acordo com van de Vel (1993), alternativamente, Calder (1971), Berge e Duchet (1975) e Sierksma (1975) provaram independentemente que, se $hl(G) \geq 2$, o número de Helly $hl(G)$ também é o menor inteiro $h \geq 2$ tal que toda família \mathcal{F} de subconjuntos convexos de $V(G)$ em que cada h membros de \mathcal{F} tem um ponto em comum, satisfaz a propriedade de que todos os membros de \mathcal{F} tem um ponto em comum. Essa é a definição mais próxima do clássico Teorema 1.5 de Helly (1923).

Teorema 3.1 (Jamison e Nowakowski 1984, Duchet 1988). *Na convexidade monofônica, o número de Helly é igual ao tamanho da maior clique, ou seja, $hl_m(G) = \omega(G)$ para todo grafo G .*

Portanto, na convexidade geodésica, $hl_g(G) = \omega(G)$ para todo grafo distância-hereditária G (relembre o Lema 2.3). Por exemplo, para toda árvore T com pelo menos 2 vértices, $hl_g(T) = hl_m(T) = 2$. Além disso, nos grafos completos, $hl_g(K_n) = hl_m(K_n) = n$ (note também que todo conjunto de vértices do K_n é convexo e, portanto, $V(K_n)$ é Helly independente máximo). Finalmente, com relação ao grafo G_2 da Figura 3.2, como ele é distância-hereditária, temos que $hl_g(G_2) = hl_m(G_2) = 2$.

Na convexidade P_3 , $hl_{p_3}(K_n) = 2$ para $n \geq 2$. Nos ciclos, temos que $hl_m(C_n) = 2$ para $n \geq 4$ e que $hl_g(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $hl_g(C_4) = 2$ (Carvalho 2016). Deixamos como Exercício 3.16 determinar $hl_{p_3}(P_n)$ e $hl_{p_3}(C_n)$.

Considere o grafo G_1 da Figura 3.1. Do Teorema 3.1, $hl_m(G_1) = 4$. Note que toda clique é um conjunto Helly independente na convexidade geodésica. Como a clique máxima de H tem 4 vértices, temos que $hl_g(G_1) \geq 4$. Deixamos como Exercício 3.17 mostrar que todo conjunto com 5 vértices é Helly dependente na convexidade geodésica em G_1 . Portanto $hl_g(G_1) = 4$. Na convexidade P_3 , note que $\{v_2, v_8, v_{12}, v_{14}\}$ é Helly independente. Logo $hl_{p_3}(G_1) \geq 4$. Deixamos como Exercício 3.18 mostrar que todo conjunto com 5 vértices é Helly dependente na convexidade P_3 . Portanto $hl_{p_3}(G_1) = 4$.

Também deixamos como Exercício 3.19 determinar $hl(G_2)$ e $hl(G_3)$ na convexidade P_3 .

3.5 Número de Posição Geral e Posto (*rank*)

Número de Posição Geral

Um subconjunto de vértices S de um grafo G está em *posição geral* na convexidade \mathcal{C} se S não contém 3 elementos x, y, z tais que z está no intervalo de x e y , ou seja, $z \notin I_{\mathcal{C}}(\{x, y\})$. O *número de posição geral* $gp_{\mathcal{C}}(S)$ de G é o maior subconjunto de $V(G)$ em posição geral em \mathcal{C} .

³Convexidades em que $hl(G) < 2$ são incomuns e pouco estudadas, como as convexidades $\{\emptyset, V(G)\}$ e $\{\emptyset, \{v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \dots\}$.

O clássico problema *No-Three-in-Line* de Dudeney (1917)⁴ busca o maior número de vértices de uma grade $m \times m$ sem que três formem uma reta, problema o qual permanece em aberto para $m > 46$ (Flammenkamp 1998). Motivados por isso, Manuel e Klavžar (2018) introduziram o número de posição geral $gp_g(G)$ na convexidade geodésica e provaram que é NP-difícil. Recentemente Araújo, Dourado et al. (2023) provaram que o número de posição geral também é NP-difícil na convexidade monofônica mesmo em grafos com diâmetro dois.

Na convexidade P_3 , curiosamente qualquer conjunto em posição geral induz um subgrafo com grau máximo 1 e, portanto, $gp_{P_3}(G)$ é equivalente ao número *diss(G) de dissociação* do grafo G , parâmetro introduzido por Yannakakis (1981) e provado NP-difícil mesmo em grafos bipartidos e em grafos planares com grau máximo 4. Na convexidade P_3^* , qualquer conjunto em posição geral induz um subgrafo cujas componentes conexas são cliques e, portanto, $gp_{P_3^*}(G)$ é equivalente ao número *IUC* do grafo G (*IUC - independent union of cliques*), parâmetro introduzido por Ertem et al. (2020) e provado NP-difícil mesmo em grafos planares.

Seja $n \geq 4$. Nos grafos completos, temos que $gp(K_n) = n$ nas convexidades geodésica e monofônica, pois todo subconjunto é convexo. Na convexidade P_3 , $gp_{P_3}(K_n) = 2$, pois todo vértice está no intervalo entre quaisquer outros dois. Nos caminhos e ciclos, $gp_m(C_n) = gp_m(P_n) = gp_g(P_n) = 2$, pois, para quaisquer 3 vértices, um está no intervalo dos outros dois. Com relação aos ciclos na convexidade geodésica, $gp_g(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $gp_g(C_4) = 2$. Na convexidade P_3 , $gp_{P_3}(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ e $gp_{P_3}(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$, pois o conjunto não pode conter três vértices consecutivos. Note que nesses exemplos o número de posição geral obteve o mesmo valor do número de Radon. Isso será útil na próxima seção, sobre o posto do grafo.

Para o grafo G_1 da Figura 3.1, note que o conjunto $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}\}$ está em posição geral na convexidade geodésica. Logo temos que $gp_g(G_1) \geq 7$. Deixamos como Exercício 3.20 mostrar que todo conjunto com 8 vértices não está em posição geral na convexidade geodésica. Portanto $gp_g(G_1) = 7$.

Note que o conjunto $\{v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ está em posição geral na convexidade monofônica, logo temos que $gp_m(G_1) \geq 5$. Deixamos como Exercício 3.21 mostrar que todo conjunto com 6 vértices de G_1 não está em posição geral na convexidade monofônica. Portanto $gp_m(G_1) = 5$.

Note que o conjunto $\{v_1, v_2, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{13}\}$ está em posição geral na convexidade P_3 , logo temos que $gp_{P_3}(G_1) \geq 9$. Deixamos como Exercício 3.22 mostrar que todo subconjunto de $V(G_1)$ com 10 vértices não está em posição geral na convexidade P_3 . Portanto $gp_{P_3}(G_1) = 9$.

Deixamos como Exercício 3.23 determinar $gp(G_2)$ e $gp(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

O lema a seguir é usado na Seção 9.2 e mostra uma caracterização de conjuntos em posição geral na convexidade geodésica de grafos bipartidos. Sua demonstração está na prova do Teorema 5.1 de Anand, Chandran S. V., Changat, Klavžar et al. (2019).

⁴Definido inicialmente como *Puzzle with Pawns* no livro de Dudeney (1917), apresentado pela prestigiada revista Nature no artigo “Amusements in Mathematics” (1917).

Lema 3.4 (Anand, Chandran S. V., Changat, Klavžar et al. 2019). *Seja G um grafo bipartido conexo com pelo menos 3 vértices. Se $S \subseteq V(G)$ é um conjunto em posição geral geodésica com $|S| \geq 3$, então S é um conjunto independente. Portanto $\text{gp}_g(G) \leq \alpha(G)$.*

Posto (rank)

Um subconjunto S de vértices de um grafo G está em *posição convexa* ou é *convexamente independente* nenhum $x \in S$ pertence a $\text{conv}(S \setminus \{x\})$; sendo *convexamente dependente* caso contrário. O *posto* de G , denotado por $\text{rk}(G)$, é definido como o tamanho do maior subconjunto convexamente independente de $V(G)$.

O posto foi introduzido por Jamison (1981) nos primórdios de convexidade em grafos. Nas convexidades monofônica e P_3 , Ramos, dos Santos e Szwarcfiter (2014) provaram que o posto é NP-difícil. Na convexidade geodésica, Kanté, Sampaio et al. (2017) provaram que o posto é NP-difícil mesmo em grafos bipartidos e obtiveram algoritmo polinomial em grafos distância-hereditária.

A Seção 3.6 mostra que $\text{gp}(G) \geq \text{rk}(G) \geq \text{rd}(G) \geq \text{hl}(G)$ nas principais convexidades de grafos. Os resultados a seguir seguem diretamente dessa desigualdade e pelo fato do número de posição geral ser igual ao número de Radon nos grafos K_n , P_n e C_n , como visto na seção anterior.

Seja $n \geq 4$. Na convexidade monofônica, $\text{rk}_m(K_n) = n$ e $\text{rk}_m(P_n) = \text{rk}_m(C_n) = 2$. Na convexidade geodésica, $\text{rk}_g(K_n) = n$, $\text{rk}_g(P_n) = 2$, $\text{rk}_g(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $\text{rk}_g(C_4) = 2$. Na convexidade P_3 , $\text{rk}_{p_3}(K_n) = 2$, $\text{rk}_{p_3}(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ e $\text{rk}_{p_3}(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

Considere o grafo G_1 da Figura 3.1. Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}\}$ é convexamente independente na convexidade geodésica, logo temos que $\text{rk}_g(G_1) \geq 7$. Deixamos como Exercício 3.24 mostrar que todo subconjunto de $V(G_1)$ com 8 vértices é convexamente dependente na convexidade geodésica. Portanto $\text{rk}_g(G_1) = 7$. Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9\}$ é convexamente independente na convexidade monofônica, logo temos que $\text{rk}_m(G_1) \geq 5$. Deixamos como Exercício 3.25 mostrar que todo subconjunto de $V(G_1)$ com 6 vértices é convexamente dependente na convexidade monofônica. Portanto $\text{rk}_m(G_1) = 5$. Como $\text{rk}_{p_3}(G_1) \geq \text{hl}_{p_3}(G_1) = 4$, temos que $\text{rk}_{p_3}(G_1) \geq 4$. Deixamos como Exercício 3.26 mostrar que todo conjunto com 5 vértices é convexamente dependente na convexidade P_3 . Portanto $\text{rk}_{p_3}(G_1) = 4$. Deixamos como Exercício 3.27 determinar $\text{rk}(G_2)$ e $\text{rk}(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

3.6 Desigualdades entre os parâmetros

Começamos com as desigualdades mais básicas, deixadas como exercício.

Lema 3.5. *Para todo grafo G e toda convexidade sobre G ,*

- $\text{in}(G) \geq \text{hn}(G) \geq |\text{Ext}(G)|$

- $ti(G) \geq tp(G)$
- $gp(G) \geq rk(G)$

Demonstração. Exercício 3.28. \square

A desigualdade abaixo supõe uma restrição muito comum em todas as principais convexidades de grafos: cada vértice separadamente forma um conjunto convexo. Isso vale, por exemplo, para todas as convexidades de caminho, como a P_3 , P_3^* , geodésica, monofônica e triangular.

Teorema 3.2. *Para todo grafo G com pelo menos dois vértices e toda convexidade sobre G tal que $\{v\}$ é convexo para todo $v \in V(G)$,*

- $hl(G) \geq 2$
- $rk(G) \geq rd(G)$

Demonstração. Para a primeira, é fácil verificar que qualquer conjunto com dois vértices de G é Helly independente. Para a segunda, é suficiente provar que todo conjunto Radon independente é convexamente independente, pois, como são parâmetros de maximização, o tamanho do maior conjunto convexamente independente será maior ou igual ao do maior Radon independente.

Seja $S \subseteq V(G)$ um conjunto Radon independente não vazio e seja $v \in S$. Pelo enunciado, temos que $\text{conv}(\{v\}) = \{v\}$. Como S é Radon independente, então $S \setminus \{v\}$ e $\{v\}$ não podem formar uma partição tal que $\text{conv}(S \setminus \{v\}) \cap \text{conv}(\{v\}) \neq \emptyset$. Ou seja, $\text{conv}(S \setminus \{v\}) \cap \{v\} = \emptyset$ e, portanto, $v \notin \text{conv}(S \setminus \{v\})$. Como isso vale para todo $v \in S$, então S é convexamente independente. \square

As desigualdades a seguir valem para qualquer convexidade de grafos. Note que a próxima desigualdade é *apertada* nos grafos completos nas convexidades monofônica, geodésica e P_3 , pois $rd_g(K_n) = hl_g(K_n) = n$ e $rd_{P_3}(K_n) = hl_{P_3}(K_n) = 2$.

Teorema 3.3 (Levi 1951). *Para todo grafo G e toda convexidade sobre G ,*

$$rd(G) \geq hl(G)$$

Demonstração. É suficiente provar, semelhante ao teorema anterior, que todo conjunto Helly independente é Radon independente, pois são parâmetros de maximização. Vamos provar a contrapositiva disto, ou seja, todo conjunto Radon dependente é Helly dependente.

Seja $S \subseteq V(G)$ um conjunto Radon dependente, ou seja, existe uma bipartição de S em subconjuntos S_1 e S_2 satisfazendo $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$. Seja $p \in \text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2)$. Para todo $v \in S$, temos que $S_1 \subseteq S \setminus \{v\}$ ou $S_2 \subseteq S \setminus \{v\}$. Portanto, $p \in \text{conv}(S \setminus \{v\})$ para todo $v \in S$, o que implica que S é Helly dependente, pois $\bigcap_{v \in S} \text{conv}(S \setminus \{v\}) \neq \emptyset$. \square

A próxima desigualdade foi obtida por Eckhoff e Jamison e, segundo van de Vel (1993), foi comunicada na tese de doutorado de Sierksma (1976). Curiosamente Jamison (1974) também fez sua tese de doutorado em convexidade.

Teorema 3.4 (Eckhoff–Jamison 1976). *Para todo grafo G e toda convexidade sobre G , se $h\ell(G) \geq 2$, então*

$$\text{cth}(G) \geq \frac{\text{rd}(G) - 1}{h\ell(G) - 1}$$

Demonstração. Seja $c = \text{cth}(G)$ e $h = h\ell(G) \geq 2$. Seja $R \subseteq V(G)$ com $|R| \geq c \cdot (h - 1) + 2$ e seja $p \in R$. Considere a família \mathcal{F} com o conjunto $\text{conv}(R \setminus \{p\})$ e todo conjunto $\text{conv}(R \setminus A)$ para $A \subseteq R$ com $|A| \leq c$ tal que $p \notin A$. Vamos provar que cada h membros de \mathcal{F} tem um ponto em comum.

Tome h membros de \mathcal{F} . Se $\text{conv}(R \setminus \{p\})$ não foi selecionado, então todos os h membros contêm o vértice p . Por outro lado, se $\text{conv}(R \setminus \{p\})$ foi selecionado, então os demais $h - 1$ membros são do tipo $\text{conv}(R \setminus A_i)$ para $1 \leq i < h$. Logo

$$\left| \bigcup_{i=1}^{h-1} A_i \right| \leq \sum_{i=1}^{h-1} |A_i| \leq c \cdot (h - 1) \leq |R| - 2$$

e, portanto, existem pelo menos dois vértices de R não cobertos pelos conjuntos A_i . Seja $q \neq p$ um deles. Então q pertence a todos os h membros de \mathcal{F} como desejado.

Portanto, pela definição do número de Helly, temos que existe um vértice x em comum a todo membro da família \mathcal{F} . Além disso, pela definição do número de Carathéodory, como $x \in \text{conv}(R \setminus \{p\})$, então existe $A \subseteq R \setminus \{p\}$ com $|A| \leq c$ tal que $x \in \text{conv}(A)$. Isso significa que R é Radon dependente, pois pode ser particionado em dois conjuntos A e $R \setminus A$ tais que $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(R \setminus A)$ é diferente de vazio, pois contém x . Logo $\text{rd}(G) \leq c \cdot (h - 1) + 1$. \square

Note que essa desigualdade é *apertada* nos grafos completos nas convexidades monofônica e geodésica, pois $\text{cth}_g(K_n) = 1$ e $\text{rd}_g(K_n) = h\ell_g(K_n) = n$. Um exemplo quase apertado ocorre na convexidade P_3 em qualquer árvore completamente binária B , pois $h\ell(B) = 2$ e $\text{cth}(B)$ e $\text{rd}(B)$ são iguais ao número de folhas. Também foi provada que essa desigualdade é *apertada* para outros casos particulares em Sierksma, Mulder e Changat (2000). Segundo van de Vel (1993), o problema de se mostrar que a Desigualdade de Eckhoff–Jamison é apertada para casos gerais era popular no fim dos anos 1970, mas foi abandonado sem uma resposta satisfatória, apesar de muitos esforços. Deixamos como Exercício 3.29 encontrar pelo menos um grafo para cada convexidade P_3 , geodésica e monofônica em que a Desigualdade de Eckhoff–Jamison é apertada. Outras desigualdades podem ser vistas em Sierksma (1977).

3.7 Exercícios

Exerc. 3.1. Prove o Lema 3.1: um vértice é ponto extremo nas convexidades geodésica e monofônica se e só se é simplicial.

Exerc. 3.2. Prove que G_1 não possui um conjunto de envoltória na convexidade P_3 de tamanho 3.

Exerc. 3.3. Faça um algoritmo polinomial para determinar $hn_{p_3}(T)$ para qualquer árvore T na convexidade P_3 . (Dica: Algoritmo TSS-SIZE-TREE da Seção 9.1).

Exerc. 3.4. Prove o Lema 3.3.

Exerc. 3.5. Determine $con(G_2)$ nas convexidades geodésica, monofônica e P_3 .

Exerc. 3.6. Determine o tempo de iteração e o tempo de percolação nos grafos G_1 e G_3 nas convexidades geodésica e monofônica.

Exerc. 3.7. Prove que ambas as definições do número de Carathéodory para convexidades abstratas são equivalentes.

Exerc. 3.8. Obtenha para cada inteiro positivo k um grafo com número de Carathéodory k na convexidade monofônica.

Exerc. 3.9. Mostre que $cth_g(G_1) = 2$, ou seja, todo conjunto com 3 ou mais vértices de G_1 é Carathéodory dependente na convexidade geodésica.

Exerc. 3.10. Mostre que todo conjunto com 5 ou mais vértices de G_1 é Carathéodory dependente na convexidade P_3 .

Exerc. 3.11. Determine os valores de $cth(G_2)$ e $cth(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

Exerc. 3.12. Mostre que todo conjunto com 5 vértices de G_1 é Radon dependente na convexidade geodésica.

Exerc. 3.13. Mostre que todo conjunto com 6 vértices é Radon dependente na convexidade P_3 .

Exerc. 3.14. Determine os valores de $rd(G_2)$ e $rd(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

Exerc. 3.15. Seja B uma árvore completamente binária. Prove que não há conjunto Radon independente de B com tamanho maior que o número de folhas.

Exerc. 3.16. Determine os valores de $hl_{p_3}(P_n)$ e $hl_{p_3}(C_n)$.

Exerc. 3.17. Mostre que todo conjunto com 5 vértices de G_1 é Helly dependente na convexidade geodésica.

Exerc. 3.18. Mostre que todo conjunto com 5 vértices de G_1 é Helly dependente na convexidade P_3 .

Exerc. 3.19. Determine os valores de $hl_{p_3}(G_2)$ e $hl_{p_3}(G_3)$ na convexidade P_3 .

Exerc. 3.20. Mostre que não existe em G_1 um conjunto em posição geral na convexidade geodésica com 8 vértices.

Exerc. 3.21. Mostre que não existe em G_1 um conjunto em posição geral na convexidade monofônica com 6 vértices.

Exerc. 3.22. Mostre que não existe em G_1 um conjunto em posição geral na convexidade P_3 com 10 vértices.

Exerc. 3.23. Determine os valores de $gp(G_2)$ e $gp(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

Exerc. 3.24. Mostre que todo conjunto com 8 vértices de G_1 é convexamente dependente na convexidade geodésica.

Exerc. 3.25. Mostre que todo conjunto com 6 vértices de G_1 é convexamente dependente na convexidade monofônica.

Exerc. 3.26. Mostre que todo conjunto com 5 vértices de G_1 é convexamente dependente na convexidade P_3 .

Exerc. 3.27. Determine os valores de $rk(G_2)$ e $rk(G_3)$ nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

Exerc. 3.28. Prove o Lema 3.5 das desigualdades básicas.

Exerc. 3.29. Encontrar pelo menos um grafo para cada convexidade P_3 , geodésica e monofônica em que a Desigualdade de Eckhoff–Jamison do Teorema 3.4 é apertada.

4

Convexidades Geométricas em Grafos

Como visto na Seção 2.1, dizemos que uma convexidade C sobre um conjunto finito V é uma *convexidade geométrica*¹ se satisfaz a *Propriedade de Minkowski–Krein–Milman*: todo conjunto convexo é o fecho convexo de seus pontos extremos. Um dos meios mais aplicados para se provar que uma certa convexidade C é geométrica é verificar a *propriedade antitroca*² ou de *antimatroide*: para todo conjunto $S \subseteq V$ convexo em C e $z_1, z_2 \notin S$, temos que $z_1 \in \text{conv}_C(S \cup \{z_2\})$ implica que $z_2 \notin \text{conv}_C(S \cup \{z_1\})$.

Lema 4.1 (Edelman e Jamison 1985). *Seja C uma convexidade sobre um conjunto finito V . Logo C é uma convexidade geométrica se e só se satisfaz a propriedade antitroca.*

Demonstração. Exercício 4.1. \square

Tal como definida acima, a propriedade antitroca é uma abstração combinatoria do fecho convexo no espaço. A Figura 4.1 mostra um exemplo no espaço \mathbb{R}^2 . Os pontos z_1 e z_2 não pertencem ao fecho convexo de S . O ponto z_1 está no fecho convexo de $S \cup \{z_2\}$, mas o ponto z_2 não pertence ao fecho convexo de $S \cup \{z_1\}$. Utilizamos aqui uma formulação equivalente da propriedade antitroca, em que S não é necessariamente convexo: se $z_1, z_2 \notin \text{conv}(S)$ e $z_1 \in \text{conv}(S \cup \{z_2\})$, então $z_2 \notin \text{conv}(S \cup \{z_1\})$.

Como veremos, poderemos provar que uma certa convexidade de grafo é geométrica aplicando diretamente a Propriedade de Minkowski–Krein–Milman ou utilizando, como ferramenta alternativa, a propriedade antitroca.

¹Também chamada de *geometria convexa*.

²Do termo inglês *anti-exchange property*.

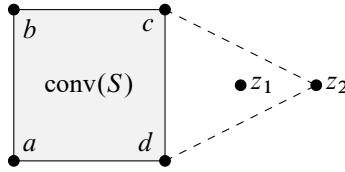


Figura 4.1: propriedade antitroca aplicada a $S = \{a, b, c, d\}$.

Convexidades geométricas baseadas em caminhos

No Capítulo 1, definimos a função de intervalo $I(\cdot)$ para conjuntos no espaço d -dimensional. Vimos que essa função pode ser utilizada para a determinação do fecho convexo de um conjunto S por meio de sucessivas aplicações. Veja a Figura 4.2, que reproduz novamente a Figura 1.2. Dado um conjunto S de pontos no espaço (representado à esquerda na figura), a primeira aplicação da função de intervalo resulta no conjunto $S_1 = I(S)$ (representado ao centro). Podemos imaginar agora a reaplicação da função de intervalo para incluir novos pontos que pertencem a segmentos cujas extremidades estão em S_1 , obtendo um novo conjunto $S_2 = I(S_1)$ (representado à direita na figura). Observe que $S \subseteq S_1 \subseteq S_2$. Como S_2 é convexo, o processo se encerra, já que $S_3 = I(S_2) = S_2$. Podemos, então, imaginar naturalmente um processo iterativo em que aplicamos várias vezes a função $I(\cdot)$ até a obtenção de um conjunto convexo S_k . Esse conjunto satisfaz a Propriedade de Minkowski–Krein–Milman, isto é, S_k é o fecho convexo de seus pontos extremos (na Figura 4.2, tais pontos extremos são os próprios pontos de S , mas isso nem sempre ocorre).

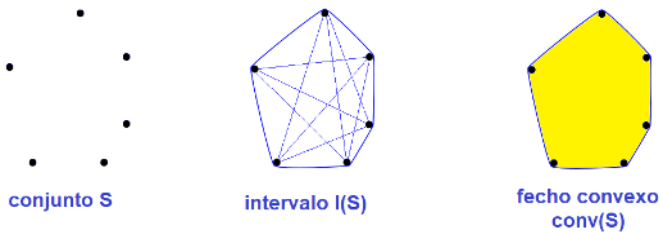


Figura 4.2: Repetindo a Figura 1.2

Passando do contexto da Geometria para o da Combinatória, mencionamos no Capítulo 2 que a função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$, para uma convexidade \mathcal{C} em um grafo G , é o análogo combinatório da função de intervalo $I(\cdot)$. Utilizemos um exemplo para compreender melhor esta afirmação.

Suponha que \mathcal{P} é a família de todos os caminhos mínimos de um grafo G e \mathcal{C} é a família formada por todo subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que S contém todo vértice de qualquer caminho mínimo com extremidades em S . Pelo Lema 2.2, \mathcal{C} é uma convexidade (de

caminhos) em G . Especificamente \mathcal{C} é a convexidade geodésica de G , introduzida na Seção 2.3. Neste caso, definimos $I_{\mathcal{C}}(S)$, para $S \subseteq V(G)$, como o conjunto de todo vértice que está em S ou em um caminho mínimo entre dois vértices de S . Note que esta definição de $I_{\mathcal{C}}(S)$ segue o que entenderíamos naturalmente como uma abstração combinatória de tomar todos os pontos que estão em segmentos com extremidades em S .

Para $S \subseteq V(G)$, faça $S = S_0$ e $S_{k+1} = I_{\mathcal{C}}(S_k)$, $k \geq 0$. Note que isso define um processo iterativo de geração de conjuntos satisfazendo $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \dots$. Como G é um grafo finito, chegaremos a um ponto em que não é mais possível incluir novos vértices em S_k , isto é, $S_{k+1} = S_k$. Logo S_k é convexo. Além disso, é fácil ver que $S_k = \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ (Exercício 4.2). Esse processo é exatamente o paralelo combinatório do processo geométrico descrito no início desta seção.

A pergunta natural que surge, então, é: será verdade que o conjunto convexo $S_k = \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ obtido pela aplicação iterativa da função $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ também satisfaz a Propriedade de Minkowski–Krein–Milman tal como ocorre na Geometria? A resposta é não. Um exemplo simples elucida essa questão. Lembre que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(G) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}(V(G))$ e que o subscrito g refere-se à convexidade geodésica.

Exemplo 4.1. A *gema* é o grafo G representado na Figura 4.3 com $V(G) = \{a, b, c, d, u\}$. Na convexidade geodésica, os pontos (vértices) extremos de G são os vértices a e d . Esse fato pode ser visto da seguinte forma: o vértice a não é vértice interno de nenhum caminho mínimo com extremidades em outros dois vértices de $V(G)$, pois seus vizinhos (b e u) são adjacentes. Portanto $a \notin \text{conv}_g(V(G) \setminus \{a\})$. O mesmo ocorre para o vértice d . Em outras palavras, $\text{Ext}_g(G) = \{a, d\}$. Por outro lado, $\text{conv}_g(\{a, d\}) = \{a, d, u\}$. Para mostrar esse fato, apliquemos sucessivas iterações da função de intervalo. Fazendo $S_0 = S = \{a, d\}$, temos que $S_1 = I_g(S_0) = \{a, d, u\}$, pois $P = aud$ é o único caminho mínimo com extremidades a e d . Aplicando a função de intervalo novamente, é fácil ver que $S_2 = I_g(S_1) = \{a, d, u\} = S_1$. Assim, realmente, $\text{conv}_g(\{a, d\}) = \{a, d, u\}$. Mas, como $S_2 \neq V(G)$, temos que $V(G)$ não é o fecho convexo de seus vértices extremos, isto é, a Propriedade de Minkowski–Krein–Milman falha nesse caso.

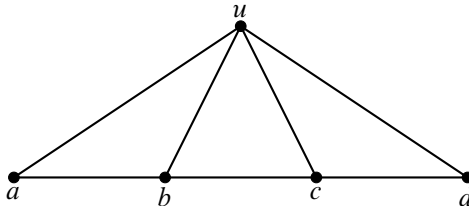


Figura 4.3: Grafo gema.

O exemplo anterior conduz-nos à seguinte questão:

Dada uma regra para a determinação dos conjuntos convexas da convexidade \mathcal{C} , quais são os grafos G para os quais a convexidade \mathcal{C} de G é geométrica?

Por exemplo, veremos nas próximas seções que a convexidade monofônica de um grafo G é geométrica se e só se G é um grafo cordal; além disso, a convexidade geodésica de G é geométrica se e só se G é Ptolemaico.

A tabela abaixo lista alguns dos resultados mais importantes deste tipo. Nas próximas seções descreveremos com detalhe estes resultados.

Classe de grafos \mathcal{G}	Convexidade geométrica \mathcal{C} associada
cordais	monofônica
Ptolemaicos	geodésica
acíclicos	triangular
florestas de estrelas	P_3
cografos cordais	P_3^* (ou l^2)
fracamente polarizáveis	m^3
fortemente cordais	forte
grafos de intervalo	de pedágio (<i>toll convexity</i>)
grafos de intervalo unitário	de pedágio fraco (<i>weakly toll convexity</i>)

Tabela 4.1: Panorama de resultados do tipo: *Um grafo G pertence à classe \mathcal{G} se e somente se a convexidade \mathcal{C} de G é geométrica.*

4.1 Convexidade monofônica e grafos cordais

Um grafo G é *cordal* se G não contém nenhum ciclo C_k , $k \geq 4$, como subgrafo induzido. Existe uma vastíssima literatura científica sobre grafos cordais. Sua fama é devida às suas clássicas e belas caracterizações, propriedades matemáticas diversas e numerosas aplicações em otimização combinatória, bancos de dados relacionais, estudos em filogenia, redes Bayesianas, alocação de registros, solução de sistemas de matrizes entre outras aplicações. Para os leitores interessados, recomendamos o clássico livro de Martin C. Golumbic (Golumbic 1980), em que os grafos cordais são chamados de *grafos triangulados*.

Nesta seção, provaremos o seguinte resultado, um dos mais fundamentais em estudos de convexidades geométricas em grafos, provado em (Farber e Jamison 1986): um grafo G é cordal se e somente se a convexidade monofônica de G é geométrica. Como vimos na Seção 2.3, a convexidade monofônica de um grafo G é aquela definida a partir dos caminhos *induzidos* de G .

Lembramos que, para um vértice $v \in V(G)$, a *vizinhança fechada* de v é o conjunto formado por v e seus vizinhos, sendo denotada por $N[v]$. Além disso, v é *simplicial* quando $N[v]$ é uma clique.

Suponha que S é um conjunto convexo da convexidade monofônica \mathcal{C} de G (*conjunto monofonicamente convexo*), e v é um vértice extremo de S . Portanto não há caminho induzido em $G[S]$ que contenha v como vértice interno. Mas isso implica que v não pode

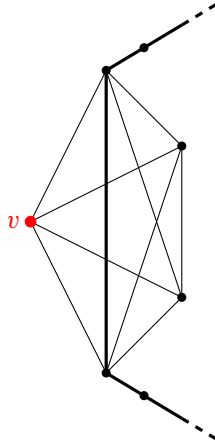


Figura 4.4: Na figura, v é um vértice simplicial. O caminho assinalado com arestas em destaque é induzido e não passa por v , mas pela sua vizinhança. Se algum outro caminho tiver v como vértice interno, deverá conter dois vizinhos de v e, portanto, não será induzido.

possuir dois vizinhos não adjacentes em S , isto é, que $N[v] \cap S$ é uma clique. Logo v é um vértice simplicial em $G[S]$. Por outro lado, é fácil ver que se v é um vértice simplicial em $G[S]$, então v é um vértice extremo de S . Logo $\text{Ext}(S) = \{v \mid v \text{ é simplicial em } G[S]\}$. A Figura 4.4 ilustra esse raciocínio.

Teorema 4.1 (ibid.). *Um grafo G é cordal se e somente se a convexidade monofônica de G é geométrica.*

Demonstração. Suponha inicialmente que G é um grafo cordal. Vamos mostrar que a convexidade monofônica \mathcal{C} de G é geométrica. Uma propriedade fundamental dos grafos cordais diz que todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais (ibid.). Logo todo vértice de $V(G)$ está em um caminho induzido entre dois vértices extremos de $V(G)$, que é trivialmente um conjunto convexo. Em outras palavras, $V(G) = I(\text{Ext}(G))$; mas é claro que $I(V(G)) = V(G)$, e, portanto, $V(G) = \text{conv}(\text{Ext}(G))$. Concluimos, então, que $V(G)$ é o fecho convexo de seus vértices extremos.

Considere agora um conjunto monofonicamente convexo $S \subseteq V(G)$. Como a classe dos grafos cordais é hereditária (isto é, todo subgrafo induzido de um grafo cordal é também um grafo cordal), temos que $G[S]$ é um grafo cordal. Utilizando os argumentos do parágrafo anterior, concluimos da mesma forma que $S = \text{conv}(\text{Ext}(S))$. Logo \mathcal{C} satisfaz a Propriedade de Minkowski–Krein–Milman, isto é, \mathcal{C} é geométrica.

Suponha agora que \mathcal{C} é geométrica. Suponhamos, a fim de obter uma contradição, que G contenha um ciclo induzido C com pelo menos quatro vértices. Note que os vértices de C não são vértices simpliciais de G , e, portanto, C não contém vértices extremos de $V(G)$.

Seja $S = \text{conv}(C)$. Claramente os vértices de C também não são vértices extremos de S . Além disso, pela definição de fecho convexo, note que cada vértice $x \in S \setminus V(C)$ foi acrescentado a S justamente por ser um vértice interno de um caminho induzido entre outros dois vértices de S . Logo $x \notin \text{Ext}(S)$. Concluimos que $\text{Ext}(S) = \emptyset$ e S não é o fecho convexo de seus extremos, isto é, a Propriedade de Minkowski–Krein–Milman falha para S , uma contradição. \square

4.2 Convexidade geodésica e grafos Ptolemaicos

Um grafo G é *Ptolemaico* se G não contém o ciclo C_k , $k \geq 4$, e a gema (Figura 4.3) como subgrafos induzidos. Note que um grafo Ptolemaico é cordal. Outra propriedade importante estabelece que, nos grafos Ptolemaicos, os caminhos induzidos são também mínimos (Howorka 1981). Na Figura 4.3, o caminho induzido $P = abcd$ entre os vértices a e d tem comprimento três. No entanto, esse caminho não é mínimo, pois o caminho $P' = aud$ tem comprimento dois. Logo a gema é uma estrutura proibida para um grafo Ptolemaico.

Suponha que S é um conjunto geodesicamente convexo. Como na seção anterior, é simples verificar que v é um vértice extremo de S se e somente se v é simplicial (Exercício 4.3). Com esta informação, podemos agora provar o seguinte resultado:

Teorema 4.2 (Farber e Jamison 1986). *Um grafo G é Ptolemaico se e somente se a convexidade geodésica de G é geométrica.*

Demonstração. Suponha inicialmente que G é um grafo Ptolemaico. Como G é cordal, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais. Entretanto, em um grafo Ptolemaico, como vimos, os caminhos induzidos são mínimos. Logo todo vértice de $V(G)$ está em um caminho mínimo entre dois vértices extremos de $V(G)$, isto é, $V(G)$ é o fecho convexo de seus vértices extremos.

Como a classe dos grafos Ptolemaicos é hereditária, temos que $G[S]$ é um grafo Ptolemaico para qualquer conjunto geodesicamente convexo $S \subseteq V(G)$, e, portanto, utilizando os mesmos argumentos acima, $S = \text{conv}(\text{Ext}(S))$. Logo a convexidade geodésica de G é geométrica.

Suponha agora que a convexidade geodésica de G é geométrica. Da mesma forma que na demonstração do Teorema 4.1, G não pode conter ciclos induzidos com quatro vértices ou mais. Além disso, considerando a discussão apresentada no Exemplo 4.1, é fácil mostrar que o fecho convexo de uma gema na convexidade geodésica não satisfaz a Propriedade de Minkowski–Krein–Milman (Exercício 4.4). Logo G não pode conter gemas como subgrafos induzidos, o que leva a concluir que G é Ptolemaico. \square

4.3 Convexidade triangular e grafos acíclicos

Nas duas seções anteriores, para provar que uma dada convexidade é geométrica, utilizamos diretamente a validade da Propriedade de Minkowski–Krein–Milman. Podemos também utilizar a propriedade antitroca, uma alternativa equivalente. É o que faremos a seguir.

Seja $P = v_1 v_2 \dots v_k$ um caminho em um grafo G . Uma *corda* de P é qualquer aresta que una vértices não consecutivos do caminho. Uma *corda triangular* é qualquer aresta da forma $v_i v_{i+2}$, sendo $1 \leq i \leq k - 2$. O caminho P é chamado de caminho *triangular* se P admite apenas cordais triangulares. A Figura 4.5 ilustra esse conceito.

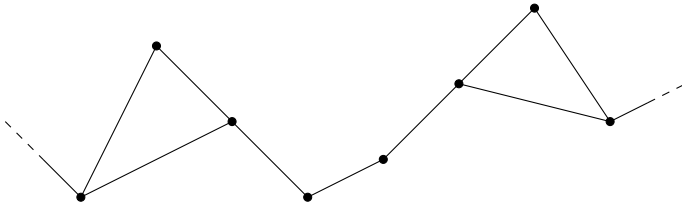


Figura 4.5: Um caminho triangular.

Na convexidade triangular, um conjunto S é *t-convexo* se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum caminho triangular entre x e y também pertence a S (Changat e Mathews 1999; Dourado e Sampaio 2016).

Teorema 4.3 (Dourado, Gutierrez et al. 2022). *A convexidade triangular de G é geométrica se e somente se G é uma floresta (grafo acíclico).*

Demonstração. Suponha inicialmente que a convexidade triangular de G é geométrica. Se existem vértices $a, b, c \in V(G)$ que induzem um grafo K_3 , então $a \in H(\{b, c\})$ e $b \in H(\{a, c\})$, o que contradiz a propriedade antitroca, uma vez que $\{c\}$ é um conjunto t-convexo. Portanto G não contém K_3 , e os vértices extremos de qualquer aresta de G formam um conjunto t-convexo. Além disso, G não contém nenhum ciclo induzido C_k para $k \geq 4$, pois se existe um tal ciclo $C_k = v_1 \dots v_k v_1$ em G , então $S = \{v_2, v_3\}$ é um conjunto t-convexo, $v_1 \in H(S \cup \{v_4\})$ e $v_4 \in H(S \cup \{v_1\})$, o que contradiz novamente a propriedade antitroca. Logo G é um grafo acíclico.

Reciprocamente suponha que G é um grafo acíclico. Como G não contém K_3 como subgrafo, a convexidade triangular e a convexidade monofônica de G são idênticas. Além disso, G é claramente cordal, o que implica, pelo Teorema 4.1, que tais convexidades são geométricas. \square

Uma nota sobre a convexidade de todos os caminhos

Um conjunto S é *tc-convexo* se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum caminho entre x e y também pertence a S . A convexidade formada pelos conjuntos tc-convexos de um grafo G é a *convexidade de todos os caminhos* de G .

É fácil ver que um vértice v é um vértice extremo de um conjunto tc-convexo S (não unitário) se e somente se v é um vértice pendente (ou uma *folha*) em $G[S]$, porque é claro que v é vértice interno de um caminho se e somente se v tem pelo menos dois vizinhos.

Se a convexidade de todos os caminhos de um grafo G é geométrica, então G não pode conter ciclos, pois o grau de todos os vértices em um ciclo C é no mínimo dois, e, portanto, $\text{conv}(V(C))$ não pode ser o fecho convexo de seus vértices extremos, já que eles não existem. Esta discussão mostra que G é acíclico.

Por outro lado, se G é acíclico, então todo vértice não folha está em um caminho entre duas folhas, e essa propriedade vale para qualquer subgrafo induzido de G . Portanto todo conjunto tc-convexo de G é o fecho convexo de seus vértices extremos, isto é, a convexidade de todos os caminhos de G é geométrica.

Os argumentos acima provam o seguinte teorema:

Teorema 4.4. *A convexidade de todos os caminhos de G é geométrica se e somente se G é um grafo acíclico.*

É interessante notar, pelos Teoremas 4.3 e 4.4, que as convexidades triangular e de todos os caminhos de um grafo acíclico G são ambas geométricas e coincidem. Porém elas não coincidem em geral. Se G é um ciclo, por exemplo, é fácil ver que a família dos conjuntos t-convexos de G é diferente da família dos conjuntos tc-convexos de G .

4.4 Convexidade P_3 e as florestas de estrelas

Uma *estrela* é um grafo formado por um vértice v de grau $k \geq 0$ (chamado de *vértice central*) e k vértices de grau um adjacentes a v . Uma *floresta de estrelas* é um grafo tal que cada uma de suas componentes conexas é uma estrela.

Pode-se mostrar que um grafo G é uma floresta de estrelas se e somente se a convexidade P_3 de G é geométrica (Dourado, Gutierrez et al. 2022). A demonstração desse resultado fica para o Exercício 4.3. A dica é utilizar as técnicas vistas em seções precedentes: aplicação da Propriedade de Minkowski–Krein–Milman ou da propriedade antitroca.

A convexidade P_3^* é tratada na próxima subseção, já que é equivalente à convexidade l^k , definida abaixo, para $k = 2$.

4.5 Convexidade l^2 e os cografos cordais

Um grafo G é um *cografo* se G não contém o grafo P_4 como subgrafo induzido. Tal como ocorre com os grafos cordais, existe uma vastíssima literatura científica sobre co-

grafos, incluindo caracterizações, algoritmos e aplicações. Cografos apresentam uma estrutura bastante ordenada e, por isso, muitos problemas computacionalmente difíceis em teoria algorítmica de grafos tornam-se tratáveis quando restritos a cografos. Uma fonte de consulta sobre cografos é o livro de Brandstädt, Le e Spinrad (1999).

Um conjunto S é l^k -convexo se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum caminho induzido de comprimento no máximo k entre x e y também pertence a S (Gutierrez, Protti e Tondato 2023). A convexidade formada pelos conjuntos l^k -convexos de um grafo G é chamada de *convexidade l^k* de G . Observe que a convexidade l^2 se identifica com a convexidade P_3^* .

Um grafo G é um *cografo cordal* se G é simultaneamente um cografo e um grafo cordal, isto é, não contém os grafos P_4 e C_k ($k \geq 4$) como subgrafos induzidos. Pode-se mostrar que um grafo G é um cografo cordal se e somente se a convexidade l^2 de G é geométrica (ibid.). A demonstração fica para o Exercício 4.6.

4.6 Convexidade m^3 e os grafos bipolarizados fracos

Um grafo G é *bipolarizado fraco* se G não contém o grafo C_k ($k \geq 5$) nem algum dos grafos da Figura 4.6 como subgrafo induzido.

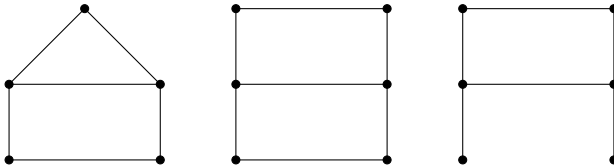


Figura 4.6: Da esquerda para a direita: grafos casa, dominó e “A”.

Os grafos bipolarizados fracos foram introduzidos por Olariu (1989). Veremos nesta seção que G é um grafo bipolarizado fraco se e somente se a convexidade m^3 de G é geométrica (Dragan, Nicolai e Brandstädt 1999). Um conjunto S é m^3 -convexo se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum caminho induzido de comprimento no mínimo três entre x e y também pertence a S . Note que um conjunto m^3 -convexo não induz necessariamente um subgrafo conexo (Exercício 4.7). A convexidade formada pelos conjuntos m^3 -convexos de G é chamada de *convexidade m^3* de G .

Uma definição alternativa de vértice simplicial é a seguinte: v é um vértice simplicial se e somente se v não é o vértice central de nenhum caminho induzido com três vértices (Exercício 4.8). Em (Jamison e Olariu 1988), esse conceito é relaxado da seguinte maneira: um vértice v é *semisimplicial* se v não é o vértice interno de nenhum grafo P_4 induzido (um caminho induzido com quatro vértices). Claramente um vértice v é um vértice extremo de um conjunto m^3 -conexo $S \subseteq V(G)$ se e somente se v é semisimplicial em $G[S]$.

Estamos agora em condições de apresentar a demonstração, de forma resumida, do seguinte teorema:

Teorema 4.5 (Dragan, Nicolai e Brandstädt 1999). *Um grafo G é bipolarizado fraco se e somente se a convexidade m^3 de G é geométrica.*

Demonstração. Suponha que a convexidade m^3 de G é uma geométrica e G contém uma casa G' como subgrafo induzido (Figura 4.6). Note que o único vértice semissimplicial possível no subgrafo de G induzido por $Y = \text{conv}(V(G'))$ é o vértice de grau dois na figura. Seja x esse vértice. Isto implica que $\text{Ext}(Y) \subseteq \{x\}$ e, portanto, $\text{conv}(\text{Ext}(Y)) \neq Y$, uma contradição. Analogamente G não pode conter o ciclo C_k ($k \geq 5$), o grafo dominó e o grafo A como subgrafos induzidos. Em consequência, G é bipolarizado fraco.

Reciprocamente se G é bipolarizado fraco, pode-se mostrar (ibid.) que todo vértice v que não é semissimplicial está em um caminho induzido de comprimento pelo menos três entre dois vértices semissimpliciais. Em outras palavras, $V(G) = \text{I}(\text{Ext}(G)) = \text{conv}(\text{Ext}(G))$. Como os grafos bipolarizados fracos são hereditários, o mesmo argumento se aplica a qualquer subgrafo induzido de G , em particular aos subgrafos induzidos por conjuntos m^3 -conexos de G . Logo a convexidade m^3 de G é geométrica. \square

4.7 Convexidade forte e grafos fortemente cordais

Dizemos que um caminho $P = u_0u_1 \dots u_n$ em um grafo G é de *cordas pares* se, para toda corda u_iu_j , $|i - j|$ é par e $\{i, j\} \cap \{0, n\} = \emptyset$. Ou seja, as cordas de P unem vértices que estão a uma distância par em P , e ambos os vértices u_0 e u_n não fazem parte de nenhuma corda de P . Veja a Figura 4.7.

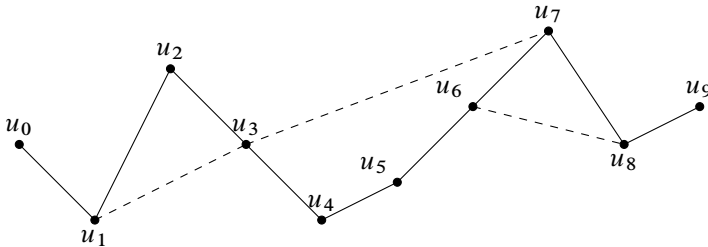


Figura 4.7: Um caminho de cordas pares. As cordas estão assinaladas com linha pontilhada

Um conjunto S é *convexo forte* se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum caminho de cordas pares entre x e y também pertence a S . A convexidade formada pelos conjuntos convexos fortes de um grafo G é chamada de *convexidade forte* de G .

Um *ciclo par* é um ciclo com um número par de vértices. Um grafo G é *fortemente cordal* (Farber 1983) se G é cordal e cada um de seus ciclos pares com pelo menos seis vértices possui uma corda ímpar (uma corda que une dois vértices que estão a uma distância ímpar no ciclo). Veja o Exercício 4.9.

Um vértice v de um grafo G é *simples* se as vizinhanças fechadas de seus vizinhos formam uma família de conjuntos aninhados, isto é, o conjunto $N(v)$ possui uma ordenação $N(v) = \{v_1, \dots, v_k\}$ de forma que $N[v_1] \subseteq N[v_2] \subseteq \dots \subseteq N[v_k]$. Veja um exemplo na Figura 4.8. Note que um vértice simples é simplicial (Exercício 4.10), mas não reciprocamente.

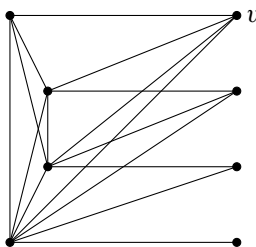


Figura 4.8: No grafo acima, v é um vértice simples.

Em (ibid.), a seguinte caracterização de grafos fortemente cordais é fornecida:

Teorema 4.6 (ibid.). *Um grafo G é um grafo fortemente cordal se e somente se todo subgrafo induzido de G contém um vértice simples.*

O teorema acima é a versão para grafos fortemente cordais da conhecida caracterização de grafos cordais que diz que um grafo G é cordal se e somente se todo subgrafo induzido de G contém um vértice simplicial – veja, por exemplo, o livro de Golubic (1980).

Podemos agora enunciar o principal resultado desta subseção:

Teorema 4.7 (Farber e Jamison 1986). *Um grafo G é fortemente cordal se e somente se a convexidade forte de G é geométrica.*

Demonstração. Suponha que a convexidade forte de G é geométrica e considere $S \subseteq V(G)$. Seja $S' = \text{conv}(S)$. Então S' é convexo forte e $\text{Ext}(S') \subseteq S$. Como todo caminho induzido é um caminho de cordas pares, um vértice extremo v de S' é necessariamente simplicial em $G[S']$, e, portanto, em $G[S]$. Isso implica que todo subgrafo induzido de G possui um vértice simplicial, isto é, G é cordal. Não é difícil provar também que, sendo G cordal, v é um vértice simples em $G[S']$, e, portanto, em $G[S]$ (Exercício 4.11). Logo todo subgrafo induzido de G possui um vértice simples. Pelo Teorema 4.6, G é fortemente cordal.

Suponha agora que G é fortemente cordal. Em (ibid.), prova-se que todo vértice não simples de um grafo fortemente cordal está em um caminho de cordas pares entre dois vértices simples de G . Em outras palavras, pelo Exercício 4.11, $V(G)$ é o fecho convexo

de seus vértices extremos. Como a classe dos grafos fortemente cordais é hereditária (Exercício 4.9), o mesmo raciocínio se aplica a qualquer conjunto convexo forte S de G . Logo a convexidade forte de G é geométrica. \square

4.8 Convexidade de pedágio e grafos de intervalo

Um passeio $u_0u_1 \dots u_{k-1}u_k$ é um *passeio com pedágio* (tolled walk) se $u_0u_i \in E(G)$ implica $i = 1$ e $u_ju_k \in E(G)$ implica $j = k-1$. Em outras palavras, u_1 é o único vértice do passeio adjacente a u_0 e, além disso, u_1 ocorre uma única vez no passeio (se $u_1 = u_j$ para $j \neq 1$, teríamos $u_0u_j \in E(G)$, ferindo a definição de passeio com pedágio). A mesma observação vale para o par u_k, u_{k-1} . A ideia dessa definição é a seguinte: o passeio inicia em u_0 , passa por um *pedágio* (o vértice u_1) uma única vez, e não retorna mais ao pedágio.

Para todos os efeitos práticos, estamos interessados apenas em passeios em que a origem e o destino são vértices distintos ($u_0 \neq u_k$). Façamos essa suposição no restante do capítulo.

Exemplo 4.2. No grafo K_n , o único passeio com pedágio possível é da forma u_0u_k (passeio que consiste de uma única aresta). Nos demais passeios, o vértice u_0 (respectivamente o vértice u_k) será adjacente a algum vértice interno u_j com $j \neq 1$ (respectivamente $j \neq k-1$), uma vez que o grafo é completo.

In (Alcón et al. 2015), passeios com pedágio foram usados para caracterizar grafos de intervalo. Um grafo G é um *grafo de intervalo* se os seus vértices podem ser associados a intervalos na reta real de modo que dois vértices são adjacentes se, e somente se, os intervalos associados a eles se intersectam. Os intervalos associados aos vértices de G formam um *modelo de intervalos* $\mathcal{I} = \{I_v\}_{v \in V(G)}$ de G . A Figura 4.9 exibe um exemplo de um grafo de intervalo. Podemos assumir sem perda de generalidade que as extremidades dos intervalos são todas distintas entre si. Informações sobre os grafos de intervalo, com aplicações, podem ser encontradas no livro de Golumbic (1980).

Dizemos que um conjunto S é *p-convexo*³ se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum passeio com pedágio entre x e y também pertence a S . A convexidade formada pelos conjuntos p-convexos de um grafo G é chamada de *convexidade de pedágio* de G .

Dado um intervalo I sobre a reta real, sejam $R(I)$ e $L(I)$ respectivamente as extremidades direita e esquerda de I . Dado um modelo de intervalos $\mathcal{I} = \{I_v\}_{v \in V(G)}$, para um grafo de intervalo G , dizemos que I_a é um *intervalo terminal* se $L(I_a) = \text{Min} \cup I_v$ ou $R(I_a) = \text{Max} \cup I_v$, isto é, I_a ocorre como o *primeiro intervalo* em \mathcal{I} (o que contém a extremidade mais à esquerda) ou o *último intervalo* em \mathcal{I} (o que contém a extremidade

³Do termo inglês *toll convex*. Aqui utilizamos o prefixo “p” para *pedágio*.

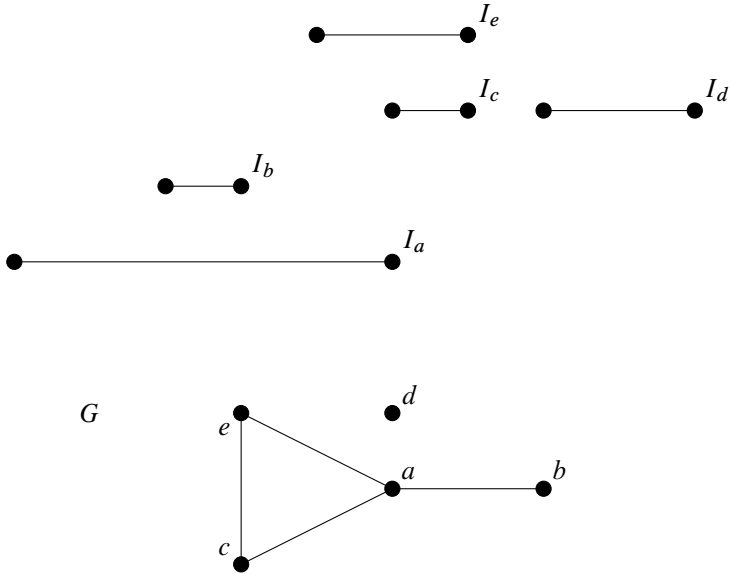


Figura 4.9: Um grafo de intervalo G (abaixo) e um modelo de intervalos de G (acima).

mais à direita). Um vértice $a \in V(G)$ é um *vértice terminal* se há um modelo de intervalos de G em que a está associado a um intervalo terminal. Além disso, o vértice a é um *vértice simplicial terminal* se a é um vértice terminal e simplicial simultaneamente.

Exemplo 4.3. Considere novamente a Figura 4.9. Os vértices simpliciais terminais de G são os vértices b, c, d, e (por quê?). O vértice a , embora esteja associado na Figura 4.9 a um intervalo terminal, não é um vértice simplicial.

Em (Alcón et al. 2015), três fatos importantes sobre vértices extremos de conjuntos p -convexos são fornecidos:

Lema 4.2 (ibid.).

- (a) Se v é um vértice extremo de um conjunto p -convexo S de um grafo G , então v é simplicial de $G[S]$.
- (b) Um vértice v de um grafo de intervalo G é um vértice extremo de um conjunto p -convexo $S \subseteq V(G)$ se, e somente se, v é um vértice simplicial terminal de $G[S]$.
- (c) Seja G um grafo de intervalo. Então todo vértice de G que não é simplicial terminal está em um passeio de pedágio entre dois vértices simpliciais terminais.

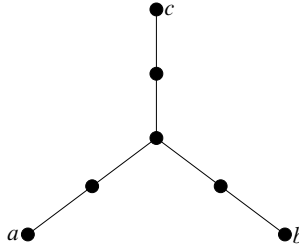


Figura 4.10: Os vértices a, b, c formam uma tripla asteroidal.

Exemplo 4.4. Como exemplo do Lema 4.2(c), lembre que na Figura 4.9 o vértice a é o único que não é simplicial terminal em G . Além disso, a é vértice interno do passeio $P = bac$, um passeio com pedágio com extremidades que são vértices simpliciais terminais (b e c). Finalmente note que cada um dentre os vértices b, c, d, e não é vértice interno de nenhum caminho com pedágio.

Para caracterizar os grafos com convexidades de pedágio geométricas, precisamos recorrer a uma importante caracterização de grafos de intervalo. Três vértices distintos de um grafo formam uma *tripla asteroidal* se entre quaisquer dois deles existe um caminho que evita a vizinhança do terceiro. Por exemplo, na Figura 4.10, os vértices a, b, c formam uma tripla asteroidal.

Teorema 4.8 (Lekkerkerker e Boland 1962). *Um grafo G é um grafo de intervalo se, e somente se, G é cordal e não contém triplas asteroidais.*

Enunciamos agora o principal resultado desta seção:

Teorema 4.9 (Alcón et al. 2015). *Um grafo G é um grafo de intervalo se, e somente se, a convexidade de pedágio de G é geométrica.*

Demonstração. Suponha que G é um grafo de intervalo. Pelo Lema 4.2, itens (b) e (c), $V(G)$ é o fecho convexo de seus vértices extremos. Como grafos de intervalo formam uma classe hereditária (Lekkerkerker e Boland 1962), qualquer conjunto p -convexo $S \subseteq V(G)$ induz um grafo de intervalo, e o mesmo argumento se aplica novamente – S é o fecho convexo de seus vértices extremos. Logo a convexidade de pedágio de G é geométrica.

Suponha agora que a convexidade de pedágio de G é geométrica. Provaremos que G é cordal. Por hipótese, todo conjunto p -convexo $S \subseteq V(G)$ é o fecho convexo de seus vértices extremos. Seja v um vértice extremo de $V(G)$. Por definição, $V(G) \setminus \{v\}$ é p -convexo em G . Logo a convexidade de pedágio de $G - v$ é geométrica, pois qualquer conjunto $S' \subseteq V(G) \setminus \{v\}$ é p -convexo em $G - v$ se e somente se S' é p -convexo em G . Isso implica, por indução, que $G - v$ é cordal; além disso, pelo Lema 4.2(a), v é um vértice simplicial de G . Portanto G também é um grafo cordal – lembrando que G é cordal se e somente se todo subgrafo induzido de G possui vértice simplicial (Golombic 1980).

Mostraremos agora que G não contém triplas asteroidais. Suponha por absurdo que a, b, c formem uma tripla asteroidal em G . Considere o passeio W de a a c formado pela concatenação de caminhos induzidos P_{ab} , de a a b , e P_{bc} , de b a c . Note que a só é adjacente a um vértice de P_{ab} e a nenhum vértice de P_{bc} . Da mesma forma, c só é adjacente a um vértice de P_{bc} e a nenhum vértice de P_{ab} . Portanto W é um passeio com pedágio de a a c passando por b . Seja $Y = \text{conv}(\{a, b, c\})$. Como $V(W) \subseteq Y$, b não é um vértice extremo de Y . Analogamente a e c não são vértices extremos de Y . Mas nenhum outro vértice $x \in Y$ é vértice extremo de Y . Isto implica que Y não contém vértices extremos, ou seja, contradição. Assim, pelo Teorema 4.8, G é um grafo de intervalo. \square

4.9 Convexidade de pedágio fraco e grafos de intervalo unitário

Um passeio $P = u_0 u_1 \dots u_{k-1} u_k$ é um passeio de pedágio fraco se $u_0 u_i \in E(G)$ implica $u_i = u_1$ e $u_j u_k \in E(G)$ implica $u_j = u_{k-1}$. Em outras palavras, o único vértice adjacente a u_0 (respectivamente, u_k) no passeio P é u_1 (respectivamente, u_{k-1}), que pode ocorrer mais vezes no passeio.

Como na seção anterior, assumimos nesta seção que $u_0 \neq u_k$.

Exemplo 4.5. Note que todo passeio com pedágio é também com pedágio fraco, mas o inverso nem sempre é verdadeiro. Considere, por exemplo, o grafo $K_{1,3}$ com conjunto de vértices $\{a, b, c, d\}$, em que o vértice de grau três é o vértice a . Note que não há passeio com pedágio contendo o vértice b como vértice interno. No entanto, existe um passeio com pedágio fraco contendo o vértice b como vértice interno (por exemplo, o passeio $P = cabad$). O mesmo vale para os vértices c e d .

Na seção anterior, passeios com pedágio foram utilizados para caracterizar grafos de intervalo por meio de convexidades geométricas. Da mesma forma, passeios com pedágio fraco serão utilizados agora para caracterizar grafos de intervalo unitário.

Um grafo de intervalo unitário ou grafo de intervalo próprio é um grafo de intervalo que admite um modelo de intervalos em que todos os intervalos possuem o mesmo comprimento; ou, equivalentemente, em que nenhum intervalo está contido em outro intervalo.

Roberts (1969) provou que grafos de intervalo unitário são exatamente os grafos de intervalo que não contêm $K_{1,3}$ como subgrafo induzido.

Exemplo 4.6. Considere novamente o grafo $K_{1,3}$. É fácil ver que $K_{1,3}$ é um grafo de intervalo, mas não é um grafo de intervalo unitário (Exercício 4.12).

Dizemos que um conjunto S é *pf-convexo*⁴ se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum passeio com pedágio fraco entre x e y também pertence a S . A convexidade formada pelos conjuntos pf-convexos de um grafo G é chamada de *convexidade de pedágio fraco* de G .

⁴Do termo inglês *weakly toll convex*. Aqui, utilizamos o prefixo “pf” para *pedágio fraco*.

O Lema 4.2 tem uma versão análoga para conjunto pf-convexos:

Lema 4.3 (Alcón et al. 2015).

- (a) *Se v é um vértice extremo de um conjunto pf-convexo S de um grafo G , então v é simplicial de $G[S]$.*
- (b) *Um vértice v de um grafo de intervalo unitário G é um vértice extremo de um conjunto pf-convexo $S \subseteq V(G)$ se e somente se v é um vértice simplicial terminal de $G[S]$.*
- (c) *Seja G um grafo de intervalo unitário. Então todo vértice de G que não é simplicial terminal está em um passeio com pedágio fraco entre dois vértices simpliciais terminais.*

Usando argumentos similares aos utilizados no Teorema 4.9, podemos provar:

Teorema 4.10 (ibid.). *Um grafo G é um grafo de intervalo unitário se e somente se a convexidade de pedágio fraco de G é geométrica.*

4.10 Classes hereditárias versus não hereditárias

Como vimos, os resultados deste capítulo podem ser colocados dentro de um esquema geral, como uma *receita* para produzir resultados sobre caracterizações de classes hereditárias de grafos por meio de convexidades geométricas:

- Consideramos uma classe hereditária de grafos \mathcal{G} , ou seja, que pode ser caracterizada por *subgrafos induzidos proibidos*. Isso significa que existe uma família \mathcal{F} de grafos tal que um grafo G pertence à classe \mathcal{G} se e só se G não contém nenhum grafo de \mathcal{F} como subgrafo induzido.
- Consideramos uma regra apropriada r para a definição de conjuntos convexos, baseada em algum sistema \mathcal{P} de caminhos ou passeios: um conjunto S é r -convexo se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum membro de \mathcal{P} entre x e y também pertence a S .
- Consideramos a correspondente convexidade \mathcal{C} formada por conjuntos r -convexos.
- Dado um grafo $G \in \mathcal{G}$, caracterizamos os vértices extremos de conjuntos r -convexos da convexidade \mathcal{C} de G .
- Provamos o seguinte teorema: *G pertence à classe \mathcal{G} se e somente se a convexidade \mathcal{C} de G é geométrica.*

- Para a prova da necessidade, mostramos inicialmente que todo vértice não extremo de G está em um membro de \mathcal{P} entre dois vértices extremos. A seguir, usamos a hereditariedade de G para mostrar que isso vale para qualquer subgrafo induzido por um conjunto convexo de \mathcal{C} .
- Para a prova da suficiência, mostramos que se existe um subgrafo induzido G' de G tal que $G' \in \mathcal{F}$, então $S = \text{conv}(V(G')) \neq \text{conv}(\text{Ext}(S))$. Este argumento usa diretamente a definição da Propriedade de Minkowski–Krein–Milman, mas podemos alternativamente usar a propriedade antitroca.

Um exercício interessante é repassar as seções precedentes e localizar em cada uma delas os elementos da receita acima (Exercício 4.13).

Outra receita menos elegante para caracterizar uma classe hereditária \mathcal{G} de grafos por meio de convexidades geométricas é trabalhar com convexidades não definidas sobre sistemas de caminhos ou passeios. Lembre que, na Seção 2.4, dados grafos G e H com $|V(H)| \geq 2$, definimos um subconjunto $S \subseteq V(G)$ como H -livre convexo se nenhum vértice fora de S induz H com algum subconjunto de S . Vimos também no Lema 2.6 que a família dos conjuntos H -livre convexos formam uma convexidade, chamada convexidade H -livre. Dada uma família \mathcal{F} de grafos com pelo menos 2 vértices, dizemos que $S \subseteq V(G)$ é \mathcal{F} -livre convexo se S é H -livre convexo para todo $H \in \mathcal{F}$. Denominamos a convexidade associada aos conjuntos \mathcal{F} -livre convexos de *convexidade \mathcal{F} -livre*. Dizemos que G é livre de \mathcal{F} se G não contém nenhum grafo de \mathcal{F} como subgrafo induzido.

Teorema 4.11 (Dourado, Gutierrez et al. 2022). *Seja \mathcal{G} uma classe hereditária de grafos e seja \mathcal{F} a família minimal de grafos tal que $G \in \mathcal{G}$ se e só se G é livre de \mathcal{F} . Portanto um grafo G é da classe \mathcal{G} se e só se a convexidade \mathcal{F} -livre de G é geométrica.*

Demonstração. Primeiro suponha que $G \in \mathcal{G}$, ou seja, G é livre de \mathcal{F} . Então, por definição, todo subconjunto de $V(G)$ é \mathcal{F} -livre convexo, significando que a propriedade antitroca é válida. Portanto a convexidade \mathcal{F} -livre de G é uma convexidade geométrica. Por outro lado, suponha que a convexidade \mathcal{F} -livre de G é uma convexidade geométrica e que G contém um grafo de \mathcal{F} como subgrafo induzido. Seja $S \subseteq V(G)$ com tamanho mínimo tal que $G[S]$ é isomorfo a um grafo de \mathcal{F} e seja H esse grafo de \mathcal{F} . Sejam x, y vértices distintos de S e seja $S' = S \setminus \{x, y\}$. Pela minimalidade de S , temos que S' é \mathcal{F} -livre convexo. Note também que $x \in \text{conv}(S' \cup \{y\})$ e $y \in \text{conv}(S' \cup \{x\})$, significando que a propriedade antitroca não é válida. Contradição, pois a convexidade \mathcal{F} -livre de G é uma convexidade geométrica. Logo G é livre de \mathcal{F} . \square

Com essa ênfase em classes hereditárias, coloca-se agora, portanto, a seguinte questão. Existe alguma classe de grafos *não hereditária* que possa ser caracterizada por meio de convexidades geométricas definidas sobre sistemas de caminhos? A resposta é sim, e é o que veremos a seguir.

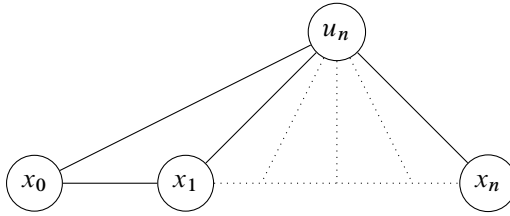


Figura 4.11: O grafo n -gema ($n \geq 4$).

Um exemplo de classe não hereditária

Como vimos na Seção 4.5, um conjunto S é l^k -convexo se, para quaisquer $x, y \in S$, todo vértice que pertence a algum caminho induzido de comprimento no máximo k entre x e y também pertence a S . A convexidade formada pelos conjuntos l^k -convexos de um grafo G é chamada de *convexidade l^k de G* .

Em (Gutierrez, Protti e Tondato 2023), apresenta-se uma caracterização da classe de grafos \mathcal{G} tal que a convexidade l^3 de todo $G \in \mathcal{G}$ é geométrica. Para compreender seu enunciado, precisamos de algumas definições.

Uma n -gema G_n ($n \geq 4$) é um grafo com vértices x_0, \dots, x_n, u_n tais que x_0, \dots, x_n induzem um caminho e u_n é um vértice universal. Veja a Figura 4.11. Assuma que G_n é um subgrafo induzido de um grafo G . Dizemos que G_n está *protegida* se existe no grafo G um P_4 entre x_0 e x_n que não contém u_n .

Observe na Figura 4.11 que o caminho $P = u_0 \dots u_n$ contém no mínimo cinco vértices. Logo, na convexidade l^3 , o fecho convexo do conjunto $\{u_0, u_n\}$ não contém todos os vértices de G_n . Se a convexidade l^3 de um grafo G é geométrica, G não pode conter G_n como subgrafo induzido, a menos que uma certa condição adicional permita essa possibilidade; essa condição é precisamente que toda n -gema de G seja protegida (condição (c) do teorema a seguir).

Teorema 4.12 (ibid.). *A convexidade l^3 de G é geométrica se e somente se as seguintes condições são satisfeitas: (a) G é cordal, (b) $\text{diam}(G) \leq 3$ e (c) toda n -gema induzida ($n \geq 4$) de G está protegida.*

Considere a classe de grafos $\mathcal{G} = \{G \mid \text{a convexidade } l^3 \text{ de } G \text{ é geométrica}\}$. Vamos mostrar que, diferentemente das demais classes de grafos apresentadas neste capítulo, \mathcal{G} não é hereditária.

Exemplo 4.7. Considere o grafo G da Figura 4.12. Observe que $\text{Ext}(G) = \{1, 7\}$ e $\text{conv}(\{1, 7\}) = V(G)$. Logo, na convexidade l^3 , $V(G)$ é o fecho convexo de seus vértices extremos. Não é difícil verificar (Exercício 4.14) que, para todo conjunto l^3 -convexo S de G , S é o fecho convexo de seus vértices extremos, isto é, que a convexidade l^3 de G é realmente geométrica. No entanto, para $x \in \{2, 5\}$, a convexidade l^3 do grafo $G - x$ não é geométrica, pois:

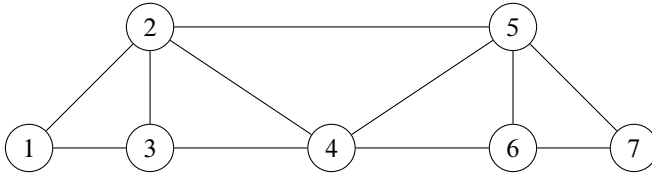


Figura 4.12: A convexidade l^3 de G é geométrica, mas esta propriedade não é verdadeira para todos os subgrafos induzidos de G . Isso implica que a classe de grafos $\mathcal{G} = \{G \mid \text{a convexidade } l^3 \text{ de } G \text{ é geométrica}\}$ não é hereditária.

- $V(G - x)$ é trivialmente um conjunto l^3 -convexo de $G - x$;
- $\text{Ext}(V(G - x)) = \{1, 7\}$;
- $\text{conv}(\{1, 7\}) = \{1, 7\} \neq V(G - x)$.

4.11 Exercícios

Exerc. 4.1. Prove o Lema 4.1: uma convexidade é geométrica se e só se satisfaz a propriedade antitroca.

Exerc. 4.2. Prove que, na aplicação sucessiva do operador de intervalo descrita na Seção 4.1, o conjunto S_k é igual a $\text{conv}_C(S)$.

Exerc. 4.3. Prove que, na convexidade geodésica de um grafo G , v é um vértice extremo de um conjunto convexo S se e somente se v é simplicial em $G[S]$.

Exerc. 4.4. Seja H um subgrafo induzido de um grafo G , tal que H é isomorfo a uma gema. Considerando a convexidade geodésica de G , mostre que $\text{conv}(H)$ não é o fecho convexo de seus pontos extremos.

Exerc. 4.5. Prove que um grafo G é uma floresta de estrelas se e somente se a convexidade P_3 de G é geométrica.

Exerc. 4.6. Prove que um grafo G é um cografo cordal se e somente se a convexidade l^2 de G é geométrica.

Exerc. 4.7. Mostre que um conjunto de vértices m^3 -conexo não induz necessariamente um subgrafo conexo.

Exerc. 4.8. Mostre que um vértice v é simplicial se e somente se v não é o vértice central de nenhum caminho induzido com três vértices.

Exerc. 4.9. Desenhe todas as possíveis configurações de ciclos de seis vértices com k cordas, para $k \in \{0, \dots, 9\}$. (Utilize simetrias a fim de evitar desenhar a mesma configuração mais de uma vez). Para cada configuração, decida se um grafo fortemente cordal pode ou não conter aquela configuração como subgrafo induzido. Conclua que a classe dos grafos fortemente cordais é hereditária por subgrafos induzidos.

Exerc. 4.10. Mostre que todo vértice simples é simplicial, e que a recíproca não é verdadeira.

Exerc. 4.11. Seja G um grafo cordal, e considere a convexidade forte de G . Prove que v é um vértice extremo de um conjunto convexo forte S se e somente se v é um vértice simples em $G[S]$.

Exerc. 4.12. Mostre que o grafo $K_{1,3}$ é um grafo de intervalo, mas não é um grafo de intervalo unitário.

Exerc. 4.13. Revise as Seções 4.1 a 4.9, e tente localizar em cada uma delas todos os elementos descritos na receita apresentada na Seção 4.10.

Exerc. 4.14. Liste todos os conjuntos l^3 -convexos do grafo G na Figura 4.12, e mostre que a convexidade l^3 de G é geométrica.

Parte II

**Principais Convexidades e
Aplicações**

5

Convexidades P_3 e P_3^*

Nesse capítulo, estudamos as Convexidades P_3 e P_3^* um pouco mais a fundo. Apesar da Convexidade Geodésica ser a mais tradicional, muitos resultados da Convexidade P_3 e da Convexidade P_3^* são utilizados para obter resultados da Convexidade Geodésica, principalmente relacionados à complexidade computacional e, por isso, decidimos apresentá-las antes.

Lembre que a convexidade P_3 de um grafo G é a convexidade de caminhos P_3 de G . Ou seja, um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é P_3 -convexo se e só se nenhum vértice $u \notin S$ possui dois vizinhos em S . Um ponto interessante é que S é um conjunto de intervalo na convexidade P_3 se e só se S é um conjunto 2-dominante de G , em que S é 2-dominante se todo vértice $u \in V(G) \setminus S$ tem pelo menos 2 vizinhos em S . O conceito de dominação e suas variantes têm muitas aplicações e constituem uma área muito difundida da teoria dos grafos (Haynes, Hedetniemi e Henning 2020).

Observe que o número de envoltória na convexidade P_3 pode ser usado para modelar a propagação de influência em redes sociais (Chen 2009; Dreyer e Roberts 2009; Kempe, Kleinberg e Tardos 2003). Nesse modelo de difusão em grafos, dizemos que os vértices sob uma dada influência estão *ativos* (ou influenciados) e vértices ativos permanecem sempre ativos. Um vértice inativo se torna ativo se possui dois vizinhos ativos. Um problema natural é obter o menor número de *influenciadores* (o conjunto de vértices ativos no início) de modo a influenciar todo o grafo após o processo de difusão. Isso é exatamente o número de envoltória da convexidade P_3 . Um modelo mais geral é mostrado na Seção 9.1.

Na convexidade P_3^* , a difusão é ligeiramente diferente: um vértice é influenciado se possui dois vizinhos ativos que não sejam vizinhos entre si. Por exemplo, se alguém

recebe uma dica de dois amigos de grupos diferentes (da universidade e do condomínio), tem boas chances de levar a dica mais a sério. Formalmente falando, a convexidade P_3^* de um grafo G é a convexidade de caminhos P_3 induzidos de G . Ou seja, um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é P_3^* -convexo se e só se nenhum vértice $u \notin S$ possui dois vizinhos em S , que não sejam vizinhos entre si.

Observe que $I_{P_3^*}(S) \subseteq I_{P_3}(S)$. Isso implica que $hn_{P_3}(G) \leq hn_{P_3^*}(G)$ e $in_{P_3}(G) \leq in_{P_3^*}(G)$. No entanto, não implica que $con_{P_3}(G) \geq con_{P_3^*}(G)$, dada a necessidade de ser um conjunto convexo próprio. Por exemplo, se G' é o grafo obtido do grafo com $n - 2$ vértices e nenhuma aresta, adicionando 2 vértices universais, então $con_{P_3}(G') = 1$ e $con_{P_3^*}(G') = n - 1$ (exercício).

A convexidade P_3 foi introduzida por Centeno, Dourado e Szwarcfiter (2009) e a convexidade P_3^* foi introduzida por Araújo, Sampaio e Szwarcfiter (2013). Como visto no Lema 2.3, as convexidades P_3 e P_3^* são equivalentes nos grafos livres de triângulo, como os grafos bipartidos, pois todo P_3 do grafo é induzido. Com isso, resultados de complexidade computacional na convexidade P_3 em grafos livres de triângulo levam aos mesmos resultados na convexidade P_3^* . Por exemplo, Barbosa et al. (2012) provaram que o número de Carathéodory da convexidade P_3 possui algoritmo polinomial para árvores e, portanto, o mesmo vale na convexidade P_3^* .

O teorema abaixo resume resultados de complexidade para todos os parâmetros da convexidade P_3 em grafos bipartidos.

Teorema 5.1 (vários autores). *Em grafos bipartidos, na convexidade P_3 (e, portanto, também na P_3^*), todos os 10 parâmetros abaixo são NP-difíceis.*

- Número de Envoltória e Convexidade (Araújo, Sampaio e Szwarcfiter 2013);
- Número de Intervalo (Centeno, Dourado e Szwarcfiter 2009);
- Número de Carathéodory (Barbosa et al. 2012);
- Número de Radon (Dourado, Rautenbach, dos Santos, Schäfer, Szwarcfiter e Toman 2013);
- Número de Helly (Dourado e da Silva 2017);
- Tempo de Percolação (Marcilon e Sampaio 2018b);
- Tempo de Iteração (Araújo, Dourado et al. 2023);
- Número de posição geral (Yannakakis 1981);
- Posto (Ramos, dos Santos e Szwarcfiter 2014).

5.1 Relação da Convexidade P_3^* com Geodésica

O Lema 2.4 mostra uma redução útil entre a convexidade P_3^* e a convexidade geodésica, que funciona bem pois obtém um grafo com diâmetro dois. O teorema abaixo mostra que essa redução leva a resultados de complexidade computacional para vários parâmetros da convexidade geodésica.

Teorema 5.2 (vários autores). *Se G não é completo e G_u é obtido de G incluindo ℓ vértices universais u_1, \dots, u_ℓ , então,*

1. $hn_g(G_u) = hn_{p_3^*}(G_u) = hn_{p_3^*}(G)$;
2. $in_g(G_u) = in_{p_3^*}(G_u) = in_{p_3^*}(G)$;
3. $con_g(G_u) = con_{p_3^*}(G_u) = con_{p_3^*}(G) + \ell$;
4. $ti_g(G_u) = ti_{p_3^*}(G_u) = \max\{ti_{p_3^*}(G), 1\}$;
5. $tp_g(G_u) = tp_{p_3^*}(G_u) = \max\{tp_{p_3^*}(G), 1\}$;
6. $cth_g(G_u) = cth_{p_3^*}(G_u) = \max\{cth_{p_3^*}(G), 2\}$;
7. $rd_g(G_u) = rd_{p_3^*}(G_u) = \omega(G) + \ell$;
8. $hl_g(G_u) = hl_{p_3^*}(G_u) = \omega(G) + \ell$;
9. $gp_g(G_u) = gp_{p_3^*}(G_u) = \max\{gp_{p_3^*}(G), \omega(G) + \ell\}$;
10. $rk_g(G_u) = rk_{p_3^*}(G_u) = \max\{rk_{p_3^*}(G), \omega(G) + \ell\}$,

em que $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G .

Demonstração. A prova para $ti(\cdot)$ e $gp(\cdot)$ encontra-se explicitamente em (Araújo, Dourado et al. 2023). A prova para os demais, com exceção de $hl(\cdot)$ e $rk(\cdot)$, encontra-se em (Araújo, Sampaio e Szwarcfiter 2013). Abaixo fornecemos uma ideia geral para a prova, deixada como exercício.

Escrevemos $I^u(\cdot)$ e $conv^u(\cdot)$ para diferenciar as funções de intervalo e o fecho convexo de G_u das de G . Primeiramente note que, se $S \subseteq V(G)$ possui pelo menos dois vértices não adjacentes, então

$$I_g^u(S) = I_{p_3^*}^u(S) = I_{p_3^*}(S) \cup \{u_1, \dots, u_\ell\},$$

$$conv_g^u(S) = conv_{p_3^*}^u(S) = conv_{p_3^*}(S) \cup \{u_1, \dots, u_\ell\}.$$

Para isso, note que todo caminho mínimo em G_u entre vértices de G é uma aresta ou P_3 induzido. Note ainda que todo P_3 induzido em G é caminho mínimo em G_u . Finalmente, como S tem dois vértices não adjacentes, então $I(S)$ contém u_1, \dots, u_ℓ nas convexidades

P_3^* e geodésica. O resto da prova é deixado como exercício, basicamente uma análise de casos para cada parâmetro.

Um caso interessante é o do número de Helly. Uma vez provando que $\text{rd}_g(G_u) = \omega(G) + \ell$, temos diretamente que $\text{hl}_g(G_u) = \omega(G) + \ell$, pois, como visto no Capítulo 3, toda clique é Helly independente na convexidade geodésica e $\text{hl}(G) \leq \text{rd}(G)$ pela Desigualdade de Levi (1951) (ver Teorema 3.3). \square

Com isso, obtemos o teorema abaixo sobre todos os dez parâmetros das convexidades P_3^* e geodésica.

Teorema 5.3. *Na convexidade P_3^* e na convexidade geodésica, os seguintes dez parâmetros são NP-difíceis em grafos com diâmetro 2: os números de envoltória, de intervalo e de convexidade, os números de Carathéodory, Radon e Helly, os tempos de iteração e percolação, o posto e o número de posição geral.*

Demonstração. Tomando $\ell = n$ no Teorema 5.2, temos que $\text{gp}_g(G_u) = \text{rk}_g(G_u) = \omega(G) + n$. Com isso, obtemos o resultado pelo Teorema 5.1, pelo Teorema 5.2 e pelo fato de que $\omega(G)$ é NP-difícil. \square

De modo semelhante, é possível obter pelo Teorema 5.2 (tomando $\ell = 1$) fortes resultados de inaproximabilidade para vários parâmetros da convexidade geodésica a partir de resultados da convexidade P_3^* , que valem tanto para P_3^* quanto para a geodésica, como os seguintes:

- Número de Envoltória é APX-difícil (Coelho, Dourado e Sampaio 2015);
- Número de Intervalo é $(1 - \varepsilon) \ln n$ -inaproximável (ibid.);
- Números de Carathéodory, Radon e de Convexidade são $n^{1-\varepsilon}$ -inaproximáveis (ibid.);
- Número de Helly é $n^{1-\varepsilon}$ -inaproximável (Dourado e da Silva 2017);
- Tempo de Percolação é $(5/4-\varepsilon)$ -inaproximável (Marcilon e Sampaio 2018b),

para qualquer $\varepsilon > 0$, em que um parâmetro é $f(n)$ -inaproximável quando não possui algoritmo polinomial com fator de aproximação $f(n)$, a menos que $\text{P}=\text{NP}$ (ver Apêndice B).

Note que, na lista acima de resultados de inaproximabilidade, só não constam o tempo de iteração, o número de posição geral e o posto. Para terminar a seção, mostramos outra redução simples que obtém um forte resultado de inaproximabilidade para o posto nas convexidades P_3^* e geodésica. Como antes, a redução funciona, pois obtém um grafo com diâmetro dois.

Teorema 5.4. *Se G não é completo e G'_u é obtido de G incluindo dois vértices u_1 e u_2 adjacentes a todo vértice de G e não adjacentes entre si, então $\text{rk}_g(G'_u) = \text{rk}_{P_3^*}(G'_u) = \omega(G) + 1$. Portanto o posto das convexidades P_3^* e geodésica são $n^{1-\varepsilon}$ -inaproximáveis para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Podemos assumir que $\text{rk}_g(G'_u) \geq 3$. Seja S um conjunto convexamente independente de G'_u na convexidade P_3^* com $|S| \geq 3$. Se S contém dois vértices x e y não adjacentes entre si, então $u_1, u_2 \in \text{conv}(S \setminus \{s\})$ e conseqüentemente $V(G'_u) \in \text{conv}(S \setminus \{s\})$ para todo $s \in S \setminus \{x, y\}$, levando a uma contradição, pois S é convexamente independente. Logo S é uma clique. Portanto $\text{rk}_g(G'_u) = \omega(G) + 1$ e o resultado segue pelo fato de que $\omega(G)$ é $n^{1-\varepsilon}$ -inaproximável para qualquer $\varepsilon > 0$ (Zuckerman 2006). \square

5.2 Resultados para algumas classes de grafos

Nesta seção, citamos mais alguns resultados da literatura sobre as convexidades P_3^* e P_3 . Na convexidade P_3^* , além dos resultados do Teorema 5.1, obtidos a partir da convexidade P_3 , também foram obtidos resultados diretos para grafos com triângulos. Por exemplo, Dourado, Penso e Rautenbach (2022) provaram que o número de envoltória é NP-difícil em grafos cordais (que podem conter muitos triângulos) e obtiveram um algoritmo linear para grafos de intervalo unitário na convexidade P_3^* (que também podem conter muitos triângulos).

Os resultados a seguir valem para a convexidade P_3 e, no caso de grafos sem triângulos, como já dito, valem também para a convexidade P_3^* . Campos et al. (2015) obtiveram algoritmos polinomiais para vários parâmetros em grafos com poucos P_4 's. Para o número de Carathéodory, Coelho, Dourado, Rautenbach et al. (2014) obtiveram um algoritmo polinomial em grafos cordais.

Nichterlein et al. (2013) provaram que o número de envoltória é W[2]-difícil mesmo em grafos bipartidos¹. Penso et al. (2015) provaram que o número de intervalo é W[2]-difícil e os números de intervalo e de envoltória são NP-difíceis mesmo em grafos planares com grau máximo 4. Cappelle et al. (2022) provaram que o número de intervalo é NP-difícil mesmo em grafos split de diâmetro 2.

Benevides, Campos et al. (2015) provaram que o tempo de percolação é polinomial em grafos cordais. Provaram ainda que é NP-difícil mesmo em grafos planares e é NP-completo decidir se o tempo de percolação é maior ou igual a k em grafos gerais para qualquer $k \geq 4$ fixo². Marcilon e Sampaio (2018b) provaram que é polinomial decidir se o tempo de percolação é maior ou igual a k para qualquer $0 \leq k \leq 3$, resolvendo a questão da complexidade para k fixo. Em grafos bipartidos, Marcilon e Sampaio (ibid.) provaram que é NP-completo decidir se o tempo de percolação é maior ou igual a k para todo $k \geq 5$ fixo. Provaram ainda que é polinomial decidir se é maior ou igual a k para qualquer $0 \leq k \leq 4$, resolvendo a questão da complexidade para k fixo em grafos bipartidos. Sobre complexidade parametrizada, Marcilon e Sampaio (2018c) provaram que o tempo de percolação é W[1]-difícil quando parametrizado pela largura em árvore (*treewidth*). Marcilon e Sampaio (2018a) também provaram que, em grafos grade de grau máximo 3,

¹Esta prova é apresentada na Seção 5.3.

²Essa prova é apresentada na Seção 5.4.

o tempo de percolação é NP-difícil, mas é polinomial se a grade for sólida (sem buracos).

5.3 Número de Envoltória é $W[2]$ -difícil

Um famoso problema conhecido por ser $W[2]$ -difícil é o problema de encontrar um Conjunto Transversal (*Hitting Set*) parametrizado pelo valor da solução (Downey e Fellows 2012).

CONJUNTO TRANSVERSAL PARAMETRIZADO

Entrada: Um conjunto U , uma família $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ e um inteiro $k \geq 0$.
 Parâmetro: k .
 Pergunta: Existe $U' \subseteq U$ tal que $|U'| \leq k$ e $U' \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$?

Dada uma instância (U, \mathcal{F}, k) do problema CONJUNTO TRANSVERSAL PARAMETRIZADO, podemos definir o seu grafo de incidência $G(U, \mathcal{F}, k) = (V_U, V_{\mathcal{F}}, E)$ como sendo um grafo bipartido em que, para cada elemento $u \in U$, há um vértice v_u em V_U , para cada subconjunto $F \in \mathcal{F}$ há um elemento $v_F \in V_{\mathcal{F}}$, e há uma aresta $v_u v_F \in E$ se, e somente se, $u \in F$ para cada $u \in U$ e $F \in \mathcal{F}$. Além disso, um subconjunto $U' \subseteq U$ tal que $U' \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$, é dito um *conjunto transversal* de \mathcal{F} .

A seguir, apresentamos uma redução parametrizada para mostrar a dificuldade computacional de determinação do parâmetro $\text{hn}_{p_3}(G)$.

NÚMERO DE ENVOLTÓRIA P_3 PARAMETRIZADO

Entrada: Um grafo G e um inteiro $k \geq 0$.
 Parâmetro: k .
 Pergunta: $\text{hn}_{p_3}(G) \leq k$?

Teorema 5.5 (Nichterlein et al. 2013). *O problema NÚMERO DE ENVOLTÓRIA P_3 PARAMETRIZADO é $W[2]$ -difícil, mesmo quando restrito a grafos bipartidos de diâmetro 4.*

Demonstração. Dada uma instância $I = (U, \mathcal{F}, k)$ de CONJUNTO TRANSVERSAL PARAMETRIZADO, construiremos uma instância $I' = (G, k + 2)$ de NÚMERO DE ENVOLTÓRIA P_3 PARAMETRIZADO equivalente em tempo polinomial em $n + m$, sendo $n = |U|$ e $m = |\mathcal{F}|$. Note que o parâmetro de I' será $k + 2 = f(k)$, em que k é o parâmetro de I . Portanto tal redução é de fato parametrizada. Assuma que $\mathcal{F} = \{F_j \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$.

Para a construção de G , constrói-se primeiro o grafo de incidência $G(I)$ como previamente definido e adiciona-se três vértices x, x_1 e x_2 e as arestas $x_1 x$ e $x_2 x$. Os vértices x_1 e x_2 manterão grau 1 ao final da construção e, portanto, deverão pertencer a todo conjunto de envoltória P_3 de G , como visto no Capítulo 3. Logo deve-se notar que $x \in \text{I}_{p_3}(\{x_1, x_2\})$. Tal vértice x será extremamente útil na construção, além de também servir na argumentação que $\text{diam}(G) \leq 4$.

Inicialmente adiciona-se todas as arestas xv_F para cada $F \in \mathcal{F}$. Note-se, logo, que se algum vértice b adjacente a v_F em G pertencer à envoltória $\text{conv}_{P_3}(S)$ de um dado subconjunto S de vértices de G que contenha x_1 e x_2 , então v_F também pertencerá a $\text{conv}_{P_3}(S)$, já que $x \in I_{P_3}(\{x_1, x_2\})$.

Cada vértice $v_u \in V_U$ de $G(I)$ será substituído, grosso modo, por um caminho de C_4 's. Veja Figura 5.1. Formalmente seja $J_u = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid u \in F_j\} = \{j_u^1, \dots, j_u^{s_u}\}$, em que $s_u = |J_u|$ é o número de subconjuntos de \mathcal{F} que têm u como elemento. Defina G_u como um grafo cujo conjunto de vértices é $\left(\bigcup_{i=1}^{s_u-1} \{a_u^i, b_u^i, c_u^i\}\right) \cup \{b_u^{s_u}\}$ e que possui as arestas $\bigcup_{i=1}^{s_u-1} \{a_u^i b_u^i, a_u^i b_u^{i+1}, c_u^i b_u^i, c_u^i b_u^{i+1}\}$. Adiciona-se também arestas $a_u^i x$ e $c_u^i x$ para cada $i \in \{1, \dots, s_u - 1\}$.

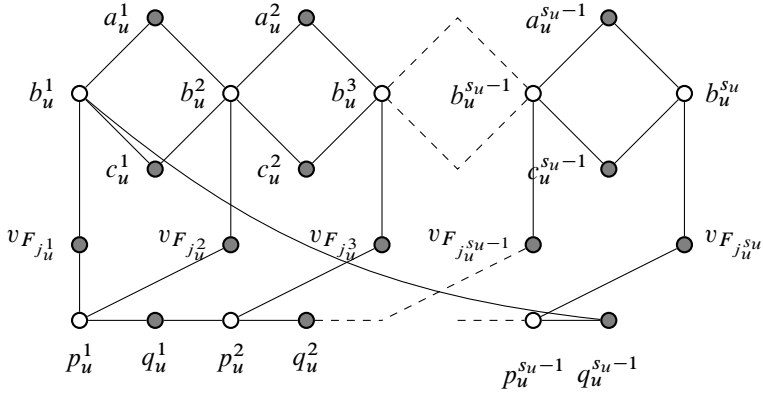


Figura 5.1: Representação de subgrafo de G associado a um elemento $u \in U$. Vértices com interior cinza possuem aresta para x .

Para cada $j \in J_u$, a aresta $v_u v_{F_j}$, que havia em $G(i)$, é representada pela aresta $b_u^i v_{F_j}$, que será adicionada a G . Adiciona-se também a aresta $b_u^0 v_{F_{j_u^1}}$. Por último, adiciona-se um caminho $P_u = (p_u^1, q_u^1, \dots, p_u^{s_u-1}, q_u^{s_u-1})$, além das arestas $q_u^i x$, para cada $i \in \{1, \dots, s_u - 1\}$, da aresta $q_u^{s_u-1} b_u^1$, da aresta $v_{F_{j_u^1}} p_u^1$ e das arestas $v_{F_{j_u^i}} p_u^{i-1}$ para todo $i \in \{2, \dots, s_u\}$.

Ao substituir, para cada $u \in U$, o vértice v_u pelo grafo G_u e adicionar o caminho P_u e as arestas, como mencionado anteriormente, termina-se a construção de G . Note que a construção de G pode ser obtida em tempo polinomial. Veja Exercício 5.4. Note também que G é bipartido. Os vértices preenchidos de cor cinza na Figura 5.1 ajudam a observar a bipartição de G . Além disso, como dito previamente, G tem diâmetro 4 já que todo vértice representado em cinza possui aresta para x .

Vamos agora argumentar que $I = (U, \mathcal{F}, k)$ é uma instância positiva para CONJUNTO

TRANSVERSAL PARAMETRIZADO se, e somente se, $\text{in}_{P_3}(G) \leq k + 2$.

Seja $U' \subseteq U$ tal que $|U'| \leq k$ e $U' \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Defina $S = \{b_u^0 \mid u \in U'\} \cup \{x_1, x_2\}$. Afirmamos que S é conjunto de envoltória P_3 de G . De fato, deve-se observar que $V(G_u) \subseteq \text{conv}_{P_3}(\{b_u^0, x_1, x_2\})$ para cada $u \in U$. Portanto os vértices dos subgrafos G_u , quando $u \in U'$, pertencerão a $\text{conv}_{P_3}(S)$. Consequentemente, como U' é um conjunto transversal de \mathcal{F} , temos também que todos os vértices v_F pertencerão a $\text{conv}_{P_3}(S)$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Isso implica que, para todo $u \in U$, todos os vértices do caminho P_u pertencerão a $\text{conv}_{P_3}(S)$. Como $q_u^{s_u-1}$ e $v_{F_{j_u}^1}$ pertencem a $\text{conv}_{P_3}(S)$, para todo $u \in U$, deduzimos que S é conjunto de envoltória de G .

Suponha agora que $\text{in}_{P_3}(G) \leq k + 2$. Seja S um conjunto de envoltória mínimo de G tal que $|S| \leq k + 2$. Como x_1 e x_2 tem grau 1, $x_1, x_2 \in S$. Como $x \in I_{P_3}(\{x_1, x_2\})$, sabemos que $x \notin S$. O leitor atento pode observar que podemos assumir que os demais k vértices de S pertencem ao conjunto $B = \{b_u^i \mid u \in U, i \in \{1, \dots, s_u\}\}$, já que um vértice r não pertencente B pode ser substituído por um vértice b de B , de modo que $r \in \text{conv}_{P_3}((S \setminus \{r\}) \cup \{b\})$.

Com essa hipótese, afirmamos que o conjunto

$$U' = \{u \in U \mid \exists i \in \{1, \dots, s_u\}(b_u^i \in S)\}$$

é um conjunto transversal de \mathcal{F} . Note que o único vértice de G_u que tem dois vizinhos em $V(G) \setminus V(G_u)$ é b_u^1 . Portanto, caso não haja nenhum vértice de G_u em S , já que S é um conjunto de envoltória na convexidade P_3 , é necessário que, no processo iterativo de construção de $\text{conv}_{P_3}(S)$, $q_u^{s_u-1}$ seja adicionado a $\text{conv}_{P_3}(S)$ antes que qualquer vértice de G_u . Note que isso só ocorrerá se todos os vértices v_{F_j} com $j \in J_u$ já estejam em $\text{conv}_{P_3}(S)$. Portanto os vértices escolhidos em S devem ser tais que, na construção iterativa de $\text{conv}_{P_3}(S)$, todos os vértices v_F sejam incluídos em $\text{conv}_{P_3}(S)$ antes que qualquer vértice de um subgrafo G_u que não tenha nenhum vértice de S o seja. Isso só ocorrerá, portanto, se U' para um conjunto de envoltória na convexidade P_3 de G . \square

5.4 Tempo de Percolação é $(4/3 - \varepsilon)$ -inaproximável

Nesta seção, mostramos que os tempos de percolação P_3 e P_3^* são $(5/4 - \varepsilon)$ -inaproximáveis para todo $\varepsilon > 0$. Ou seja, não possuem algoritmos polinomiais com aquele fator de aproximação, a menos que $P=NP$ (ver Apêndice B).

Benevides, Campos et al. (2015) provam no Teorema 5.6 abaixo que, em grafos não bipartidos, é difícil decidir se o tempo de percolação P_3 é maior ou igual a 4. Marcilon e Sampaio (2018b) provam no Teorema 5.7 abaixo que, em grafos bipartidos, é difícil decidir se o tempo de percolação P_3 (e P_3^*) é maior ou igual a 5. Eles provam ainda que, na convexidade P_3 , decidir se o tempo de percolação é maior ou igual a 1, 2 ou 3 é polinomial em grafos gerais e decidir se o tempo de percolação é maior ou igual a 1, 2, 3 ou 4 é polinomial em grafos bipartidos, resolvendo por completo a questão da complexidade do tempo de percolação P_3 .

Teorema 5.6 (Benevides, Campos et al. 2015). *O problema de decidir se o tempo de percolação na convexidade P_3 é maior ou igual a k é NP-completo para qualquer inteiro $k \geq 4$.*

Demonstração. Redução do problema 3-SAT (ver Apêndice B). Dadas m cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ sobre variáveis $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, denotamos os três literais de C_i por $\ell_{i,1}$, $\ell_{i,2}$ e $\ell_{i,3}$. A seguir, construímos um grafo G de acordo com essa instância de 3-SAT.

Para cada cláusula C_i , adicione a G o subgrafo da Figura 5.2. Para cada par de literais $\ell_{i,a}, \ell_{j,b}$ tais que um é a negação do outro, adicione um vértice $y_{(i,a),(j,b)}$ adjacente a $w_{i,a}$ e $w_{j,b}$. Seja Y o conjunto de todos os vértices criados dessa forma. Além disso, adicione um vértice z adjacente a todos os vértices em Y e um vértice z' de grau 1 cujo único vizinho é z . Denote os conjuntos $\{u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}\}$ e $\{w_{i,1}, w_{i,2}, w_{i,3}\}$ por U_i e W_i respectivamente. Seja $U = \cup_{1 \leq i \leq m} U_i$ e $W = \cup_{1 \leq i \leq m} W_i$. Seja L o conjunto de vértices de grau 1 em G .

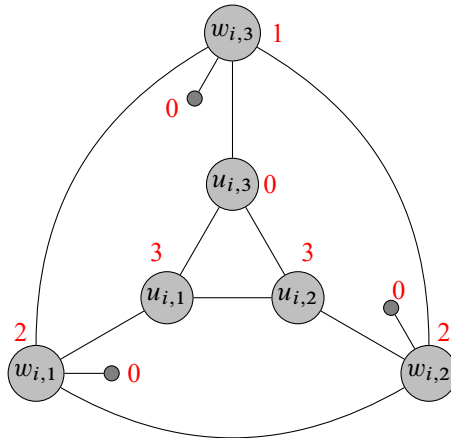


Figura 5.2: Subgrafo a ser adicionado em G para a cláusula C_i . Os números ao lado dos vértices indicam o tempo de iteração do vértice a partir do conjunto dos vértices com tempo 0.

Primeiro considere o caso $k = 4$. Mostramos que \mathcal{C} é satisfatível se e só se G contém um conjunto de envoltória com tempo de percolação pelo menos 4.

Suponha que \mathcal{C} é satisfatível (possui uma atribuição das variáveis que satisfaz toda cláusula). Portanto, para toda cláusula C_i , seja $k_i \in \{1, 2, 3\}$ tal que ℓ_{i,k_i} é verdadeiro. Seja $S' = \{u_{i,k_i} : 1 \leq i \leq m\}$ e $S = S' \cup L$. Então $I^1(S)$ é obtido de S adicionando os vértices $\{w_{i,k_i} : 1 \leq i \leq m\}$; $I^2(S)$ é obtido de $I^1(S)$ adicionando os vértices restantes de W ; $I^3(S)$ é obtido de $I^2(S)$ adicionando os vértices de Y junto com os vértices restantes de U ; e $I^4(S)$ é obtido de $I^3(S)$ adicionando o vértice z . Logo G tem tempo de percolação pelo menos 4.

Agora suponha que $\text{tp}(G) \geq 4$ e seja S qualquer conjunto de envoltória de G com tempo de percolação pelo menos 4. Note que $L \subseteq S$. Além disso, para toda cláusula C_i , temos que $U_i \cap S \neq \emptyset$ pois $|N(u_{i,j}) - U_i| \leq 1$ para todo i, j . Isso implica que $W \subseteq I^2(S)$, $U \cup Y \subseteq I^3(S)$ e $z \in I^4(S)$. Finalmente se $Y \cap I^2(S) \neq \emptyset$, então $z \in I^3$ e $\text{tp}(S) \leq 3$, levando a uma contradição. Portanto $Y \cap I^2(S) = \emptyset$, o que implica que nenhum par $\{u_{i,a}, u_{i,b}\}$, sendo $\ell_{i,a}$ a negação de $\ell_{j,b}$, está em S . Logo a atribuição de verdadeiro a cada literal $\ell_{i,j}$ tal que $u_{i,j} \in S$ resulta em uma atribuição que satisfaz C .

Finalmente, para valores $k > 4$, é suficiente subdividir a aresta zz' em um caminho P de comprimento $k - 4$, incluindo um novo vértice de grau 1, vizinho a cada vértice de P . \square

Teorema 5.7 (Marcilon e Sampaio 2018b). *Em grafos bipartidos, o problema de decidir se o tempo de percolação nas convexidades P_3 e P_3^* é maior ou igual a k é NP-completo para qualquer inteiro $k \geq 5$.*

Demonstração. A ideia da demonstração é seguir a prova do Teorema 5.6, substituindo o subgrafo da Figura 5.2 pelo da Figura 5.3, incluído para cada cláusula C_i . O restante da construção do grafo G é idêntico. É fácil ver que o grafo G construído é bipartido. Note ainda que, de modo semelhante à prova do Teorema 5.6, os vértices no interior do quadrado da Figura 5.3 formam um conjunto coconvexo, pois cada um só tem um vizinho fora. Ou seja, todo conjunto de envoltória deve ter pelo menos um vértice de cada quadrado em G .

No Teorema 5.6, os vértices $w_{i,j}$ são gerados em tempo 1 ou 2, o que faz com que o vértice z seja gerado em tempo 4 se a fórmula é satisfatível, e tempo 3 caso contrário. Com a substituição para o subgrafo da Figura 5.3, os vértices $w_{i,j}$ serão gerados em tempo 1, 2 ou 3, o que faz com que, seguindo os argumentos da prova do Teorema 5.6, o vértice z seja gerado em tempo 5 se a fórmula é satisfatível, e tempo 4 caso contrário. \square

Com o Teorema 5.6 e o Teorema 5.7, concluímos o seguinte:

Corolário 5.1. *Na convexidade P_3 , o tempo de percolação é $(4/3 - \varepsilon)$ -inaproximável em grafos gerais e $(5/4 - \varepsilon)$ -inaproximável em grafos bipartidos para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Técnica do gap para provar inaproximabilidade: se existe algoritmo polinomial com fator de aproximação r menor que $4/3$, então ele pode ser usado para decidir entre tempo 3 e 4. O mesmo para $5/4$ em grafos bipartidos. \square

5.5 Exercícios

Exerc. 5.1. Conclua a prova do Teorema 5.2.

Exerc. 5.2. O Teorema 5.4 obtém uma equação para o posto no grafo G'_u . Obtenha as equações dos demais parâmetros de convexidade.

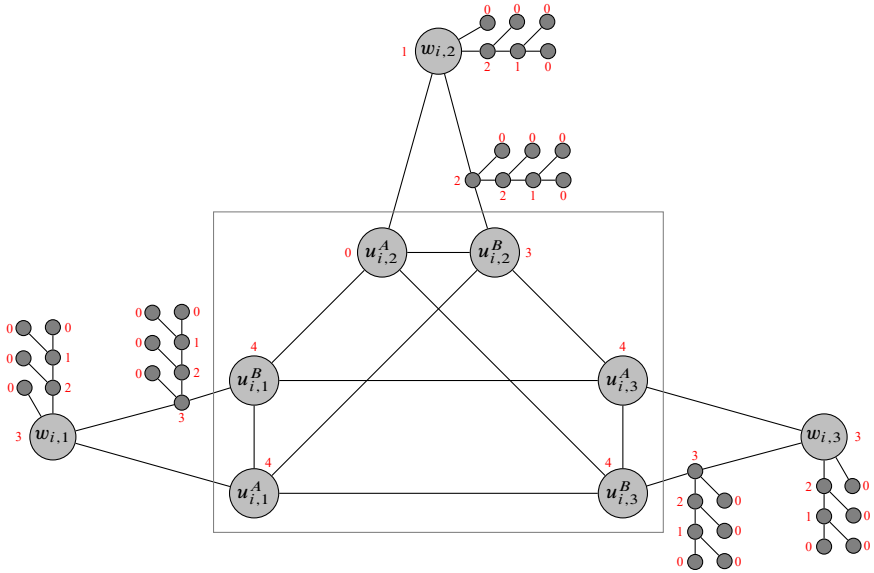


Figura 5.3: Subgrafo bipartido a ser adicionado a G para a cláusula C_i . Os números ao lado dos vértices indicam o tempo de iteração do vértice a partir do conjunto dos vértices com tempo 0.

Exerc. 5.3. Seja G' o grafo obtido de $n - 2$ vértices isolados, adicionando 2 vértices universais. Prove que $\text{con}_{P_3}(G') = 1$ e $\text{con}_{P_3^*}(G') = n - 1$.

Exerc. 5.4. Dada uma instância (U, \mathcal{F}, k) do problema CONJUNTO TRANSVERSAL PARAMETRIZADO, em que $|U| = n$ e $|\mathcal{F}| = m$, explicita a ordem do grafo G construído na demonstração do Teorema 5.5 em função de n e m .

6

Convexidade Geodésica

Neste capítulo, apresentamos com detalhes alguns resultados sobre parâmetros definidos no Capítulo 3 no contexto da Convexidade Geodésica¹. Deve-se destacar que não há o intuito aqui de apresentar a revisão bibliográfica completa sobre essa convexidade, que é muito extensa. Ao leitor interessado, é recomendado o livro de Pelayo (2013) para referências até 2013. Destacamos, porém, que há bastante literatura recente publicada sobre o tema, sobretudo no que diz respeito à Complexidade Computacional. A seguir, daremos um enfoque especial nesses trabalhos.

Deve-se lembrar que, como apresentado na Capítulo 2, a Convexidade Geodésica em um grafo G é uma convexidade de intervalos, em grafos, cuja função de intervalo é definida como segue:

$$I_g(S) = S \cup \{v \in V(G) \mid \exists u, w \in S (v \text{ pertence a alguma } u, w\text{-geodésica em } G)\},$$

para todo $S \subseteq V(G)$. Lembre que u, v -geodésica é sinônimo de u, v -caminho mínimo. Ou seja, dado um grafo G , a convexidade geodésica em G é a família de subconjuntos $\mathcal{C} \subseteq 2^{V(G)}$ tal que $S \in \mathcal{C}$ se, e somente se, $I_g(S) = S$. Os elementos de \mathcal{C} são ditos *geodesicamente convexos*.

¹Alguns autores, como Pelayo (2013), usam os termos *geodético* e *geodética* como adjetivos do substantivo *geodésica*. No entanto, livros clássicos como Gruber e Wills (1993) e van de Vel (1993) não usam esses termos, usando *geodésico* e *geodésica* como adjetivos do substantivo *geodésica*. Por exemplo, *intervalo geodésico* e *convexidade geodésica*. Seguimos o padrão de Gruber e Wills (1993) e van de Vel (1993).

A envoltória convexa de $S \subseteq V(G)$ na convexidade geodésica, denotada por $\text{conv}_g(S)$, pode ser, então, obtida por sucessivas aplicações da função de intervalo $I_g(\cdot)$. De modo algorítmico, para a obtenção de $\text{conv}_g(S)$, pode-se adicionar inicialmente S a um conjunto candidato C e repetir iterativamente o seguinte procedimento: enquanto houver vértice $w \in V(G) \setminus C$ que pertença a algum u, v -caminho mínimo entre dois vértices $u, v \in C$, adicione w a C . Tal algoritmo pode ser executado em $\mathcal{O}(|S| \cdot m(G))$ (Dourado, Gimbel et al. 2009). Veja Exercício 6.1.

Do Lema 3.1, apresentado na página 20, é importante lembrar que o conjunto de *vértices simpliciais* em um grafo G , aqueles vértices cujas vizinhanças são cliques de G , corresponde ao conjunto de vértices extremos de G na convexidade geodésica. Ou seja, $V(G) \setminus \{v\}$ é um conjunto geodesicamente convexo se, e somente se, v for simplicial. Em outras palavras, não há em $V(G) \setminus \{v\}$ dois vértices u e w tais que haja um u, w -caminho mínimo em G que contenha um vértice de $\{v\}$.

Um subconjunto S é dito *coconvexo* na convexidade geodésica de um grafo G , se $V(G) \setminus S$ é geodesicamente convexo. Claramente os conjuntos unitários que contenham um vértice simplicial na convexidade geodésica de um grafo G são coconvexos. Tal noção é de grande importância para algumas demonstrações a seguir.

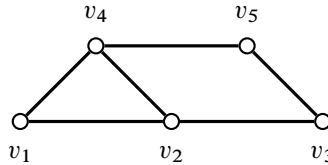


Figura 6.1: Exemplo para a convexidade geodésica

Na Figura 6.1, pode-se notar que o vértice v_1 é simplicial e, portanto, o subconjunto $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é geodesicamente convexo. Além disso, observe que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é também um exemplo de subconjunto geodesicamente convexo, já que não há caminho mínimo entre dois destes vértices que tenha v_4 ou v_5 como vértice interno. Consequentemente o subconjunto $\{v_4, v_5\}$ também é coconvexo, assim como $\{v_1\}$. Deve-se por último observar que o próprio subconjunto $\{v_4, v_5\}$ é também geodesicamente convexo.

Outro fato relevante previamente mencionado é que há uma caracterização de grafos ptolemaicos apresentada no Teorema 4.2. São exatamente aqueles grafos em que as convexidades geodésica e geométrica coincidem.

6.1 Números de Intervalo e de Envoltória

Como definido nas Seções 4.1 e 4.2, um conjunto de intervalo $S \subseteq V(G)$ na convexidade geodésica de um grafo G , também conhecido como *conjunto geodésico*, é tal que $I_g(S) = V(G)$. O número de intervalo na convexidade geodésica de G é a cardinalidade de um menor conjunto geodésico de G . Tal parâmetro é também conhecido como

número geodésico e denotado por $\text{in}_g(G)$ (Harary, Loukakis e Tsouros 1993). Já um conjunto de envoltória $S \subseteq V(G)$ na convexidade geodésica de um grafo G deve satisfazer $\text{conv}_g(S) = V(G)$. A cardinalidade de um menor conjunto de envoltória na convexidade geodésica de G , denotado por $\text{hn}_g(G)$, é o número de envoltória de G (Everett e Seidman 1985).

Para um primeiro exemplo, o leitor pode revisar as Seções 4.1 e 4.2, página 38. Se G é o grafo representado na Figura 6.1, note que v_1 deve pertencer à todo conjunto de intervalo e a todo conjunto de intervalo na convexidade geodésica deste grafo, pois é simplicial. Mais ainda, não há subconjunto com dois vértices que seja de envoltória e, consequentemente, não há um de intervalo na convexidade geodésica de G . Trivialmente $\{v_1, v_3, v_5\}$ é um conjunto de intervalo e, portanto, de envoltória, tendo que $\text{in}_g(G) = \text{hn}_g(G) = 3$.

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre esses parâmetros, os mais estudados na literatura.

Limitantes e caracterizações

O *diâmetro* de um grafo G é o maior comprimento de um caminho mínimo entre dois vértices de G , denotado por $\text{diam}(G)$. Logo segue que:

Teorema 6.1 (Chartrand, Harary e Zhang 2002). *Se G é um grafo não trivial, então*

$$2 \leq \text{hn}_g(G) \leq \text{in}_g(G) \leq n(G) - \text{diam}(G) + 1.$$

Demonstração. Vide Exercício 6.2. \square

Como dito previamente, devido ao Lema 3.1, todo vértice simplicial em um grafo G deve necessariamente pertencer a todo conjunto de intervalo e a todo conjunto de envoltória de G na convexidade geodésica. Mais do que isso, se $v \in V(G)$ não é simplicial, então $V(G) \setminus \{v\}$ é um conjunto de intervalo e, portanto, um conjunto de envoltória. Logo $\text{hn}_g(G) = \text{in}_g(G) = n(G)$ se, e somente se, G é completo. No caso do número de envoltória, tal fato é observado por Everett e Seidman (1985).

Uma pergunta natural: em que casos tais parâmetros podem ser iguais e se há exemplos em que divergem? Como dito na Seção 4.2, tal igualdade também é válida para árvores e ciclos.

Teorema 6.2 (Chartrand, Harary e Zhang 2002). *Para todos n, k e d números inteiros tais que $n - d - k + 1 \geq 0$, $2 \leq k \leq n$ e $2 \leq d \leq n$, existe um grafo G tal que $\text{hn}_g(G) = \text{in}_g(G) = k$, $\text{diam}(G) = d$ e $n(G) = n$.*

Demonstração. Seja G_k o grafo representado na Figura 6.2. G_k é obtido de um caminho (u_0, \dots, u_d) adicionando $k - 2$ vértices v_1, \dots, v_{k-2} de grau um, cujo único vizinho é u_1 , e $n - d - k + 1$ vértices $w_1, \dots, w_{n-d-k+1}$, cuja vizinhança é exatamente $\{u_0, u_2\}$. Note que $n(G) = n$, $\text{diam}(G) = d$ e os vértices v_1, \dots, v_{k-2}, u_d são simpliciais, portanto são conjuntos coconvexos triviais, porém $S = \{v_1, \dots, v_{k-2}, u_d\}$ não é nem um conjunto de

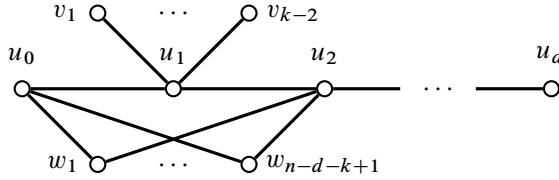


Figura 6.2: Grafo G_k .

intervalo, nem de envoltória. Logo $\text{hn}_g(G_k) \geq k$ e $\text{in}_g(G_k) \geq k$, sendo tais desigualdades satisfeitas na igualdade já que se adicionarmos u_0 ao subconjunto S supramencionado, obtemos um conjunto de intervalo na convexidade geodésica. \square

Já em Chartrand, Harary e Zhang (2000) são definidos grafos G tais que $\text{hn}_g(G) = \alpha$ e $\text{in}_g(G) = \beta$ para todos $2 \leq \alpha \leq \beta \leq n(G)$ inteiros. Vide Exercício 6.3.

Há ainda na literatura diversos limitantes para o número de envoltória na convexidade geodésica. Alguns exemplos desses limitantes podem ser encontrados nos trabalhos de Everett e Seidman (1985) e Dourado, Protti, Rautenbach et al. (2010a). A seguir, detalhamos uma demonstração mais recente, que melhora um limitante de Everett e Seidman (1985) e responde a uma pergunta deixada em aberto no mesmo trabalho.

A demonstração de tais limitantes segue, via de regra, a mesma essência. Constrói-se um conjunto de envoltória S de um dado grafo G iterativamente. Inicialmente alguns limitantes escolhem dois vértices à maior distância, o que implica que na primeira aplicação da função de intervalo pelo menos os vértices internos de um maior caminho pertencerão à envoltória de S . Tais limitantes, conseqüentemente, são escritos em função de $\text{diam}(G)$. Já outros limitantes adicionam inicialmente a S o conjunto de vértices simpliciais, caso existam e, se não, apenas um vértice arbitrário. Em seguida, repete-se o seguinte processo: enquanto a envoltória de S for distinta de $V(G)$, busca-se em $V(G) \setminus \text{conv}_g(S)$ um vértice para ser adicionado a S de modo que se garanta que mais vértices em $V(G) \setminus \text{conv}_g(S)$ pertencerão à envoltória do novo conjunto S . Apresentamos um desses limitantes a seguir.

Teorema 6.3 (Araújo, Campos et al. 2013). *Seja G um grafo conexo com n vértices e s vértices simpliciais. Então,*

$$\text{hn}_g(G) \leq \max\{1, s\} + \left\lceil \frac{3(n - \max\{1, s\})}{5} \right\rceil.$$

Além disso, esse limitante é apertado.

Demonstração. Descrevemos a seguir um algoritmo que construirá iterativamente um conjunto de envoltória S de G cuja cardinalidade satisfará tal limitante.

Caso G possua vértices simpliciais, defina $S_0 \subseteq V(G)$ como o subconjunto de vértices simpliciais de G . Se não, defina $S_0 \subseteq V(G)$ como um conjunto unitário escolhendo arbitrariamente um vértice de G para pertencer à S_0 . Note que essa escolha corresponderá aos termos $\max\{1, s\}$ no limitante acima. Defina $H_0 = \text{conv}_g(S_0)$. Considere $i = 0$ inicialmente. Caso $H_0 = V(G)$, já não há mais nada a acrescentar e retornamos $S = S_0$.

Vamos descrever como adicionar no passo $i + 1$ um subconjunto de vértices escolhidos X_i à S_i de modo que $S_{i+1} = S_i \cup X_i$ e tomaremos $H_{i+1} = \text{conv}_g(S_{i+1})$. Denotaremos por $\overline{H}_i = V(G) \setminus H_i$. A escolha de X_i , mais ainda, deverá implicar na adição de novos vértices em H_{i+1} na proporção de 3 para 5, ou seja, a cada 5 vértices de H_{i+1} , no máximo 3 pertencem a \overline{H}_{i+1} , para que ao final do processo o limitante desejado seja obtido.

Enquanto $\overline{H}_i \neq \emptyset$, se houver vértice $u \in \overline{H}_i$ cujo menor caminho a algum vértice em H_i tenha comprimento pelo menos 2, então tome $X_i = \{u\}$ e os conjuntos S_{i+1} e H_{i+1} , portanto são definidos de acordo. Note que haverá ao menos um vértice em \overline{H}_i não incluso em S_{i+1} , que pertencerá a \overline{H}_{i+1} , aquele pertencente a um caminho mínimo de u a algum vértice de H_i . Vide Figura 6.3a. Logo foi selecionado um vértice para S_{i+1} e pelo menos um a mais será incluído em H_{i+1} , então a proporção de 3 para 5 é respeitada.

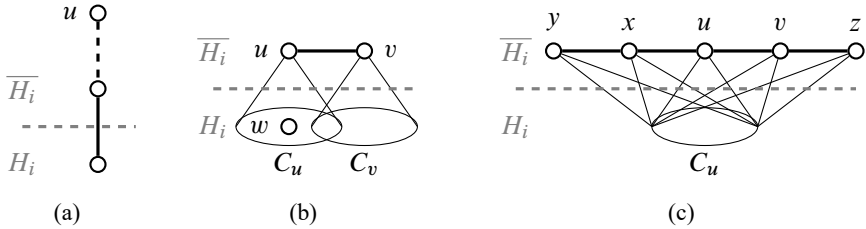


Figura 6.3: Análise de casos para Teorema 6.3.

Se não houver tal vértice, então todo vértice em \overline{H}_i possui ao menos um vizinho em H_i . Deve-se notar que, para cada $u \in \overline{H}_i$, temos que $N_G(u) \cap H_i$ é necessariamente uma clique, já que H_i é geodeticamente convexo e $u \notin H_i = \text{conv}_g(S_i)$. Mais ainda, como os vértices simpliciais de G pertencem a S_0 , caso existam, então u não pode ser simplicial. Consequentemente u possui vizinho $v \in \overline{H}_i$.

Denote por $C_u = N(u) \cap H_i$ a vizinhança de u em H_i que, como dito, é uma clique. Pela mesma argumentação, v também possui vizinhos em H_i e tal vizinhança corresponde a uma clique C_v . Caso haja vértice $w \in C_u \setminus C_v$, note que podemos nesse caso escolher $X_i = \{v\}$, já que u pertence a um v -caminho mínimo e adicionaremos novamente um vértice a S_{i+1} e mais um vértice será incluído a H_{i+1} . Veja Figura 6.3b. O argumento análogo ocorre quando há vértice $w \in C_v \setminus C_u$. Portanto vamos assumir que $C_v = C_u$ e u deve possuir um vizinho $x \in \overline{H}_i$ tal que $xv \notin E(G)$.

Analogamente podemos argumentar que x deve possuir vizinhos em H_i , que $N(x) \cap H_i = C_x$ é uma clique e $C_x = C_u = C_v$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que u é um vértice de grau mínimo em \overline{H}_i . Consequentemente x e v devem possuir vizinhos y e z respectivamente, tais que $y, z \notin N(u)$. Veja Figura 6.3c. Nesse caso, adi-

cionaremos a S_{i+1} não apenas um, mas três vértices de uma vez, tomando $X_i = \{u, y, z\}$ e observando que x e v pertencerão a H_{i+1} .

Caso $H_{i+1} = V(G)$, retornamos $S = S_{i+1}$. Se não, incrementamos em uma unidade o valor de i e recomeçamos a análise.

Para um exemplo apertado, é suficiente tomar a união de vários C_5 e a eles adicionar um vértice universal. Pode-se observar que 3 a cada 5 vértices de cada C_5 devem pertencer a todo conjunto de envoltória de tal grafo. Tal exemplo deve-se a Everett e Seidman (1985). \square

A seguir, apresentamos resultados de complexidade computacional (tanto de NP-completude como de parametrizada) para ambos os parâmetros $\text{in}_g(G)$ e $\text{hn}_g(G)$ mesmo em classes de grafos relativamente simples, bem como apresentamos casos tratáveis (por algoritmos de tempo polinomial) em outras classes de grafos para ambos os parâmetros.

Análise de Complexidade Computacional

Dados um grafo G e um inteiro positivo k , são problemas NP-completos decidir se $\text{in}_g(G) \leq k$ e se $\text{hn}_g(G) \leq k$. A seguir, apresentamos um breve resumo de resultados de complexidade para esses parâmetros e exemplos de demonstrações.

Dificuldade para $\text{in}_g(G)$. A dificuldade computacional para determinação do número de intervalo geodésico foi demonstrada já no primeiro trabalho que trata do tema (Harary, Loukakis e Tsouras 1993). Dourado, Protti, Rautenbach et al. (2010b) demonstram que ainda é NP-difícil determinar $\text{in}_g(G)$, mesmo que G seja cordal ou cordal bipartido. Também é NP-difícil determinar $\text{in}_g(G)$, quando G é livre de P_5 (Dourado, Penso e Rautenbach 2016). Resultado similar foi obtido para grafos planares e grafos linha por Chakraborty, Foucaud et al. (2020), enquanto que Chakraborty, Das et al. (2020) mostram a dificuldade para grafos grades parciais subcúbicas e grafos de intervalos, melhorando os resultados anteriores para grafos subcúbicos (Bueno et al. 2018) e para grafos cordais (Dourado, Protti, Rautenbach et al. 2010b). Kellerhals e Koana (2022) estudam a Complexidade Parametrizada desse parâmetro e mostram que decidir se $\text{in}_g(G) \leq k$ é $W[1]$ -difícil quando parametrizado por k , tamanho de uma cobertura mínima por vértices de G e largura em caminho de G combinados.

Mostramos a seguir uma das reduções mais simples encontradas na literatura para esse parâmetro. Dado um grafo G , um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$, para toda aresta $uv \in E(G)$, é um *conjunto dominante* de G . A cardinalidade de um menor conjunto dominante de G é denotada por $\gamma(G)$. O problema CONJUNTO DOMINANTE a seguir é um dos mais clássicos problemas NP-completos (Garey e Johnson 1979).

CONJUNTO DOMINANTE

Entrada: Grafo U e um inteiro $k \geq 0$.
Pergunta: $\gamma(G) \leq k$?

Vamos reduzir este problema ao de NÚMERO DE INTERVALO GEODÉSICO.

NÚMERO DE INTERVALO GEODÉSICO

Entrada: Grafo U e um inteiro $k \geq 0$.
Pergunta: $\text{in}_g(G) \leq k$?

Teorema 6.4 (Dourado, Protti, Rautenbach et al. 2010b). *Dados G grafo e k inteiro positivo, NÚMERO DE INTERVALO GEODÉSICO é NP-completo, mesmo que G seja cordal.*

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor verificar que NÚMERO DE INTERVALO GEODÉSICO pertence a NP, vide Exercício 6.4.

Dada uma instância $I = (G, k)$ de CONJUNTO DOMINANTE, construiremos em tempo linear uma instância $I' = (G', k')$ de NÚMERO DE INTERVALO GEODÉSICO equivalente, em que $k' = k + n(G)^2$.

O grafo G' é obtido de G , ou seja, primeiro copia-se G para ser um subgrafo de G' , como segue. Para cada vértice $v \in V(G)$, adicionam-se a G' dois novos vértices $x_v, y_v \in V(G')$ e as arestas $y_v x_v, x_v v \in E(G')$. Finalmente adiciona-se a G' um vértice $z \in V(G')$ que seja adjacente em G' a todos os vértices v e x_v , para todo $v \in V(G)$. Note que $n(G') = 3n(G) + 1$ e, portanto, G' pode ser construído em tempo linear. Cabe ao leitor verificar que G' é cordal, vide Exercício 6.5. Veja a Figura 6.4 para um pequeno exemplo de construção sobre um grafo $G = P_3$ com vértices a, b e c . Defina $X = \{x_v \mid v \in V(G)\}$ e $Y = \{y_v \mid v \in V(G)\}$.

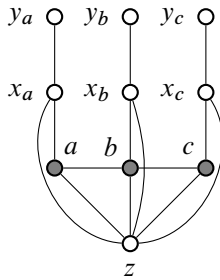


Figura 6.4: Construção de G' a partir de $G = P_3$. Vértices de G tem preenchimento de cor cinza.

Devemos provar que $\gamma(G) \leq k$ se, e somente se, $\text{in}_g(G') \leq k + n(G)$. Suponha primeiro que S é um conjunto dominante de G tal que $|S| \leq k$. Defina $S' = S \cup Y$. Portanto $|S'| \leq k + n(G)$. Vamos provar que S' é conjunto de intervalo geodésico de G . Note que $X \cup \{z\} \subseteq I_g(Y) \subseteq I_g(S')$, já que há um y_v, y_u -caminho mínimo

²Como k' não é função exclusiva de k , note que tal redução não pode ser usada para argumentar que o NÚMERO DE INTERVALO GEODÉSICO é W[2]-difícil, apesar de tal fato ser verdade para o CONJUNTO DOMINANTE.

(y_v, x_v, z, x_u, y_u) em G' para todo $v, u \in V(G)$ com $v \neq u$, podendo assumir também, sem perda de generalidade, que G é conexo e não trivial. Como S é dominante, note também que cada vértice de $v \in V(G) \setminus S$ possui algum vizinho $u \in S$. Logo, em G' , $v \in I_g(S')$, pois $u \in S \subseteq S'$, $y_v \in S'$ e (u, v, x_v, y_v) é um caminho mínimo de G' .

Suponha agora que S' é um conjunto de intervalo geodésico de G' tal que $|S'| \leq k + n(G)$. Seja $S = S' \cap V(G)$. Sabemos que $Y \subseteq S'$, vide Lema 3.1. Logo $|S| \leq k$. Vamos provar que S é conjunto dominante de G . Seja $u \in V(G) \setminus S$. Como S' é conjunto de intervalo geodésico de G' , existem vértices $v, w \in S'$ tais que u pertence a algum v, w -caminho mínimo de G' . Vamos provar que $\{v, w\} \cap N_G(u) \neq \emptyset$ e, portanto, o resultado seguirá.

Não é possível que $\{v, w\} \subseteq Y$, já que só há um y_a, y_b -caminho mínimo em G' , o que contém x_a, z e x_b , ou seja, não contém nenhum vértice de $V(G)$ em G' . Caso $\{v, w\} \subseteq X \cup V(G)$, note que tanto v quanto w são vizinhos de z . A existência de um v, w -caminho que contém u , implica que $\text{dist}_{G'}(v, w) = 2$, $v \neq z$ e $w \neq z$. Portanto temos que $\{v, w\} \subseteq N_{G'}(u)$ e, logo, $N_G(u) \cap \{v, w\} \neq \emptyset$, já que $v \neq z$, $w \neq z$ e u possui apenas um outro vizinho em $V(G') \setminus V(G) = x_u$. Finalmente suponha que $v \in Y$ e $w \in X \cup V(G)$. Como quaisquer dois vértices de $X \cup V(G)$ estão a distância no máximo 2 em G' e $v = y_a$ possui um único vizinho x_a em G' , para algum $a \in V(G)$, temos que $\text{dist}_{G'}(v, w) = 3$ e o caminho $(v = y_a, x_a, u, w)$ é um v, w -caminho mínimo de G' . Nesse caso, a única possibilidade é $u = a$ e $w \in N_G(a)$. \square

Apesar de os autores não mencionarem explicitamente em seu trabalho, a demonstração anterior mostra que o Teorema 6.4 vale mesmo para grafos restritos a diâmetro no máximo 4.

Casos tratáveis para $\text{in}_g(G)$. O parâmetro $\text{in}_g(G)$, apesar da dificuldade computacional de determinação como apresentado anteriormente, pode ser calculado em tempo polinomial para diversas classes de grafos: cografos (Dourado, Protti, Rautenbach et al. 2010b), grafos split (ibid.), grafos ptolemaicos (Farber e Jamison 1986), grafos de bloco cactos (Ekim et al. 2012), grafos periplanares (Mezzini 2018) e grafos de intervalos próprios (Ekim et al. 2012). Além disso, o valor de $\text{in}_g(G)$ pode ser resolvido em tempo FPT quando parametrizado pela profundidade em árvore de G (*tree-depth*), pelo número de transversal de ciclos em arestas de G (*feedback edge set number*) e pela largura modular de G (*modular-width*) (Kellerhals e Koana 2022). Chakraborty, Das et al. (2020) mostram ainda que decidir se $\text{in}_g(G) \leq k$ pode ser resolvido em tempo FPT quando parametrizado pela largura em árvore de G . Tal algoritmo implica em um algoritmo linear para árvores.

A seguir, apresentamos um exemplo de algoritmo polinomial para determinação do número de intervalo geodésico.

A classe de *cografos* é definida recursivamente como segue:

1. Um grafo trivial é um cografo;
2. Se G é um cografo, então \overline{G} também o é;

3. Se G_1 e G_2 são cografos, então a união disjunta $G = G_1 \cup G_2$ é um cografo.

Esses grafos são bastante estudados na literatura. Há diversas caracterizações deles, sendo talvez os mais conhecidos por corresponderem aos grafos que não possuem caminhos com 4 vértices como subgrafo induzido (Cornell, Lerchs e Burlingham 1981). Pela definição recursiva da classe, para um cografo G , pode-se obter em tempo polinomial uma árvore enraizada (T, r) que representa a construção de G , cujas folhas são os vértices de G e cada nó interno $v \in V(T)$ representa uma das operações (complemento ou união disjunta) aplicada sobre os subgrafos representados pelos filhos de v . O grafo G é então o cografo representado pela raiz r de T . Esta é a árvore de decomposição modular de G e pode ser obtida em tempo linear (McConnell e Spinrad 1999).

Teorema 6.5 (Dourado, Protti, Rautenbach et al. 2010b). *Se G é um cografo conexo e \overline{G} possui k componentes conexas não triviais, cujos subgrafos induzidos pelo vértices destas componentes em G são G_1, \dots, G_k , então:*

1. *Se $k = 0$, então $\text{in}_g(G) = n(G)$;*
2. *Se $k = 1$, então $\text{in}_g(G) = \text{in}_g(G_1)$;*
3. *Se $k \geq 2$, então $\text{in}_g(G) = \min\{4, \min\{\text{in}_g(G_i) \mid i \in \{1, \dots, k\}\}\}$.*

Demonstração. Para provar o Item 1, note que sob esta hipótese G deve ser um grafo completo. Logo $\text{hn}_g(G) = n(G)$, pelo Lema 3.1.

Para provar o Item 2, observe que G_1 não é um subgrafo completo, nem é trivial, já que G_1 corresponde a uma componente conexa não trivial em \overline{G} . Mais ainda, como G é cografo, G não possui subgrafos induzidos isomorfos a um P_4 . O mesmo ocorrerá para G_1 . Portanto quaisquer dois vértices em G_1 estão à distância máxima de 2, já que todo caminho mínimo é induzido. Logo um conjunto de intervalo geodésico mínimo S_1 de G_1 deve conter dois vértices não adjacentes, já que G_1 não é completo, e sendo $I_g(S_1)$ obtida a partir de caminhos de comprimento 2. Logo S_1 também é conjunto de intervalo geodésico de G . Portanto $\text{in}_g(G) \leq \text{in}_g(G_1)$. Por outro lado, observe que todo conjunto de intervalo geodésico mínimo de G não pode conter um vértice $v \in V(G) \setminus V(G_1)$, já que v é universal em G (vide Exercício 6.6). Portanto $\text{in}_g(G) = \text{in}_g(G_1)$.

Finalmente, para provar o Item 3, note que cada G_i é um subgrafo de G que não é completo, não é trivial e, como os vértices desses subgrafos formam componentes em \overline{G} , há todas as arestas entre quaisquer dois vértices de subgrafos distintos G_i e G_j para $1 \leq i \neq j \leq k$.

Seja $S = \{v_1, v_2, u_1, u_2\}$, para quaisquer dois vértices não adjacentes $v_1, v_2 \in V(G_1)$ e quaisquer dois vértices não adjacentes $u_1, u_2 \in V(G_2)$. Note que todo vértice $w \in V(G) \setminus V(G_1)$ satisfaz $w \in I_g(S)$, já que w será adjacente a v_1 e v_2 . Analogamente $V(G_1) \in I_g(S)$, já que todo vértice de $V(G_1)$ é adjacente a u_1 e u_2 . Portanto $\text{in}_g(G) \leq 4$.

Caso haja G_i tal que $\text{in}_g(G_i) < 4$, como cada G_i não é trivial nem completo, temos que ao menos dois vértices não adjacentes de G_i pertencem a todo conjunto de intervalo mínimo S_i na convexidade geodésica de G_i . Logo S_i também será conjunto de intervalo

mínimo geodésico de G . Reciprocamente vamos provar que se G possui conjunto de intervalo mínimo geodésico S de cardinalidade menor que 4, tal conjunto corresponde a um conjunto de envoltória mínimo para G_i para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Caso $S \subseteq V(G_i)$, não há o que provar. Suponha o contrário. Caso $|S| = 2$, então os dois elementos de S são adjacentes. S só poderia ser um conjunto de intervalo de G , caso $V(G) = S$, mas G não é completo. Caso $|S| = 3$, novamente como G não é completo, a única possibilidade é S possuir dois elementos em um subgrafo G_i e um em G_j para $1 \leq i \neq j \leq k$. Sejam $v_1, v_2 \in S \cap V(G_i)$ e $u \in S \cap V(G_j)$. Como $u \in I_g(\{v_1, v_2\})$ e $uv_1, uv_2 \in E(G)$, então $S \setminus \{u\}$ é conjunto de intervalo geodésico mínimo de G , contradizendo a minimalidade de S . Logo esse último caso não ocorre. \square

Dificuldade para $hn_g(G)$. Com respeito ao número de envoltória geodésico, o primeiro resultado na literatura que trata da dificuldade computacional de determinação desse parâmetro foi apresentado por Dourado, Gimbel et al. (2009).

Tal redução foi modificada para mostrar ainda que é NP-completo decidir se $hn_g(G) \leq k$ mesmo que G seja restrito a ser bipartido, mas ainda é uma demonstração consideravelmente longa (Araújo, Campos et al. 2013). Há ainda na literatura uma outra demonstração de NP-dificuldade para determinação de $hn_g(G)$ quando G pertence à classe de cubos parciais, uma subclasse de bipartidos (Albenque e Knauer 2016). Tal redução reside fortemente em propriedades inerentes a essa classe de grafos e também não é simples. Também foi demonstrado que determinar $hn_g(G)$ é NP-difícil para a classe de grafos livres de P_9 (Dourado, Penso e Rautenbach 2016).

A dificuldade na apresentação desses resultados reside no fato que é necessário a verificação de todos os caminhos mínimos entre os pares de vértices da instância construída pela redução.

A forma mais simples de demonstrar que decidir se $hn_g(G) \leq k$, para um grafo G qualquer, é um problema computacionalmente difícil, que encontramos na literatura, usa um resultado similar para $hn_{p_3}(G)$ quando G é sem triângulos e a observação, cujo argumento essencial apresentamos a seguir, já apresentado nos Lemas 2.3 e 2.4, na Página 16.

Lema 6.1. *Seja G um grafo livre de triângulos que não seja completo e seja G' o grafo obtido de G pela adição de um vértice universal v' . Então S é conjunto de envoltória mínimo na convexidade P_3 de G , se, e somente se, S é conjunto de envoltória mínimo na convexidade geodésica de G .*

Demonstração. Primeiro deve-se notar que, como G é livre de triângulos, cada vértice $u \in I_{p_3}^k(S) \setminus I_{p_3}^{k-1}(S)$ é adicionado a $conv_{p_3}(S)$ na k -ésima iteração em G devido à existência de um caminho P_3 induzido em G tal u é vértice interno de um x, y -caminho P_3 , para vértices $x, y \in I_{p_3}^{k-1}(S)$. Como G' possui um vértice universal v' , quaisquer dois vértices $x, y \in V(G)$ estão à distância no máximo 2 em G' . Portanto todo caminho mínimo entre dois vértices $x, y \in V(G)$ em G' é um caminho induzido de G de comprimento no máximo 2. Logo S também é um conjunto de envoltória na convexi-

dade geodésica de G' , uma vez que, como G' não é completo, v' pertence à envoltória de quaisquer dois vértices não adjacentes de S em G' .

Para a recíproca, seja S' um conjunto de envoltória mínimo na convexidade geodésica de G' . Como G não é completo, G' também não o é. Como v' é universal de G' e S' é um conjunto de envoltória mínimo na convexidade geodésica de G' , note que v' não pertence a S' (vide Exercício 6.6). Logo $S' \subseteq V(G)$. Afirmamos que S' é conjunto de envoltória na convexidade P_3 de G . Como S' é um conjunto de envoltória na convexidade geodésica de G' e G' tem diâmetro 2, segue que cada caminho mínimo em G' tem comprimento no máximo 2 e, portanto, qualquer $u \in I_g^k(S') \setminus I_g^{k-1}(S')$ é adicionado a $\text{conv}_g(S')$ na k -ésima iteração em G' devido à existência de um caminho P_3 induzido em G tal u é vértice interno de um x, y -caminho P_3 , para vértices $x, y \in I_g^{k-1}(S')$. Logo o resultado segue. \square

De posse do Lema 6.1, podemos argumentar a dificuldade computacional do seguinte problema.

NÚMERO DE ENVOLTÓRIA GEODÉSICO PARAMETRIZADO

Entrada:	Um grafo G e um inteiro $k \geq 0$.
Parâmetro:	k .
Pergunta:	$\text{hn}_g(G) \leq k$?

Corolário 6.1 (Kanté, Marcilon e Sampaio 2019). *O problema NÚMERO DE ENVOLTÓRIA GEODÉSICO PARAMETRIZADO é W[2]-difícil, mesmo quando G tem diâmetro 2.*

Demonstração. É uma consequência direta do Teorema 5.5, apresentado na Página 61, e do Lema 6.1. \square

Kanté, Marcilon e Sampaio (ibid.) mostram ainda que decidir se $\text{hn}_g(G) \leq k$ é W[1]-difícil quando parametrizado por k e pela largura em árvore de G combinados é XP, quando parametrizados apenas pela largura em árvore de G .

Casos tratáveis para $\text{hn}_g(G)$. O número de envoltória geodésico, apesar de intratável mesmo para subclasses de grafos bipartidos como os cubos parciais, pode ser determinado em tempo polinomial para algumas classes de grafos. Dourado, Gimbel et al. (2009) mostram algoritmos polinomiais para determinar $\text{hn}_g(G)$ quando G é um grafo de intervalos unitários, quando G é split ou quando G é um cografo. Araújo, Campos et al. (2013) generalizam o resultado de cografos para a classe de grafos $(q, q-4)$ e também mostram algoritmos polinomiais para complementos de bipartidos e para cactus. Kanté e Nourine (2013) apresentam algoritmo polinomial para grafos de distância hereditária. Dourado, Penso e Rautenbach (2016) mostram algoritmos polinomiais para determinar $\text{hn}_g(G)$ quando G é livre de pata (pav) e de P_5 , quando cada 6 vértices de G induzem no máximo um P_5 e quando G é livre de P_k e a cintura de G é pelo menos $k-1$ para todo k inteiro positivo.

Coelho, Coelho et al. (2022) recentemente apresentaram um algoritmo polinomial para calcular $\text{hn}_g(G)$ quando G é um prisma complementar.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração do seguinte resultado, que implica em um algoritmo polinomial para determinação do número de envoltória geodésico de um cografo. A demonstração é bastante semelhante à do Teorema 6.5.

Teorema 6.6 (Dourado, Gimbel et al. 2009). *Se G é um cografo conexo e \overline{G} possui k componentes conexas não triviais, então:*

1. *Se $k = 0$, então $\text{hn}_g(G) = n(G)$;*
2. *Se $k = 1$, então $\text{hn}_g(G) = \text{hn}(G_1)$, em que $G_1 \subseteq G$ é o subgrafo induzido pelos vértices da única componente não trivial de G ;*
3. *Se $k \geq 2$, então $\text{hn}_g(G) = 2$.*

Demonstração. Vide Exercício 6.7. \square

6.2 Número de Convexidade

O número de convexidade geodésico $\text{con}_g(G)$ é o tamanho do maior conjunto geodesicamente convexo próprio do grafo G , parâmetro introduzido por Chartrand, Wall e Zhang (2002).

Existem vários resultados de complexidade computacional para o número de convexidade. Por exemplo, nas convexidades P_3 e geodésica, além da determinação de $\text{con}_g(G)$ ser um problema NP-difícil, é altamente inaproximável, já que não há algoritmo polinomial com fator de aproximação $n^{1-\varepsilon}$ para nenhum $\varepsilon > 0$, a menos que $P = NP$ (Coelho, Dourado e Sampaio 2015).

Consideremos o problema de determinar o número de convexidade geodésico na sua versão de decisão.

NÚMERO DE CONVEXIDADE GEODÉSICO

Entrada: Grafo G e um inteiro $k \geq 0$.
Pergunta: $\text{con}_g(G) \geq k$?

Mostremos inicialmente que podemos resolver o problema acima em tempo polinomial quando k é uma constante. Por definição, $\text{con}_g(G) < k$ se, e somente se, o fecho convexo geodésico de qualquer conjunto com exatamente k vértices contém todos os vértices de G . Sendo k constante, podemos gerar e testar todos esses conjuntos em tempo polinomial. Portanto, para k constante, o NÚMERO DE CONVEXIDADE GEODÉSICO está em P.

Vamos mostrar agora o problema NÚMERO DE CONVEXIDADE é NP-completo mesmo quando o grafo G de entrada é bipartido.

Teorema 6.7 (Dourado, Protti, Rautenbach et al. 2012). *O NÚMERO DE CONVEXIDADE GEODÉSICO restrito a grafos bipartidos é NP-completo.*

Demonstração. Uma vez que o fecho convexo geodésico de um conjunto pode ser determinado em tempo polinomial, o NÚMERO DE CONVEXIDADE GEODÉSICO está em NP. Para provar a NP-completude, reduzimos uma instância (H, k) do conhecido problema NP-completo CLIQUE (ver Garey e Johnson 1979, p. 194) a uma instância (G, k') do NÚMERO DE CONVEXIDADE GEODÉSICO tal que o grafo H tem uma clique de ordem pelo menos k se, e somente se, (i) $\text{con}_g(G) \geq k'$; (ii) o comprimento de codificação de (G, k') é polinomialmente limitado em termos do comprimento de codificação de (H, k) e (iii) G é bipartido.

Seja (H, k) uma instância de CLIQUE. Claramente podemos assumir que H é conexo e $k \geq 3$. Construimos G da seguinte maneira. Para cada vértice u de H , criamos quatro vértices w_u, x_u, y_u e z_u em G e adicionamos três arestas $x_u z_u, y_u z_u$ e $w_u z_u$ como mostrado na Figura 6.5 (a). Para cada aresta uv de H , criamos um conjunto $V_{uv} = \{a_{uv}, b_{uv}, c_{uv}, d_{uv}, e_{uv}\} \cup I_{uv}$ de $n + 5$ vértices adicionais em G , em que n denota a ordem de H e I_{uv} denota um conjunto independente de n vértices, e adicionamos arestas de modo que z_u, w_u, z_v e w_v , juntamente com os vértices em V_{uv} , induzem o grafo G_{uv} como mostrado na Figura 6.5(b), em que todos os vértices em I_{uv} têm exatamente os mesmos quatro vizinhos. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} V(G_{uv}) &= \{w_u, z_u, w_v, z_v \mid uv \in E(H)\} \cup \{a \in V_{uv} \mid uv \in E(H)\}; \\ E(G_{uv}) &= \{z_u w_u, z_v w_v\} \\ &\cup \{a_{uv} b_{uv}, b_{uv} c_{uv} \mid uv \in E(H)\} \\ &\cup \{z_u a_{uv}, z_v a_{uv}, z_u c_{uv}, z_v c_{uv} \mid uv \in E(H)\} \\ &\cup \{z_u d_{uv}, z_v d_{uv}, z_u e_{uv}, z_v e_{uv} \mid uv \in E(H)\} \\ &\cup \{w_u b_{uv}, w_v b_{uv} \mid uv \in E(H)\} \\ &\cup \{a w_u, a w_v, a d_{uv}, a e_{uv} \mid a \in I_{uv}, uv \in E(H)\}. \end{aligned}$$

Para completar a construção, criamos dois vértices x e y em G e adicionamos arestas xx_u e yy_u para todos os vértices u de H . Observe que G é bipartido com bipartição (V_1, V_2) , sendo:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{x_u, y_u, w_u \mid u \in V(H)\} \cup \{a_{uv}, c_{uv}, d_{uv}, e_{uv} \mid uv \in E(H)\}; \\ V_2 &= \{z_u \mid u \in V(H)\} \cup \{b_{uv} \mid uv \in E(H)\} \cup \{x, y\} \cup \{a \in I_{uv} \mid uv \in E(H)\}. \end{aligned}$$

A Figura 6.6 ilustra a construção completa de G para o caso em que H é um caminho P_3 com três vértices a, b e c .

$$\text{Seja } k' = 3k + (n + 5) \binom{k}{2} + 1.$$

Claramente o comprimento da codificação de (G, k') é polinomialmente limitado em termos do comprimento da codificação de (H, k) . Resta provar que H tem uma clique de ordem de pelo menos k se, e somente se, o número de convexidade geodésica de G for pelo menos k' .

Primeiramente assumimos que H tem uma clique C de ordem de pelo menos k e construímos um conjunto S como se segue. Para cada dois vértices u e v em C , adicionamos todos os vértices de G_{uv} a S . Para cada vértice u em C , adicionamos o vértice x_u a S . Por

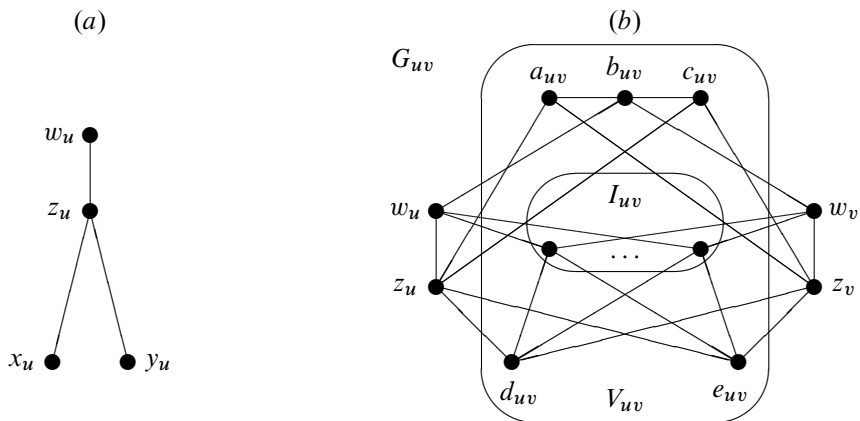


Figura 6.5: Gadgets para a construção de G

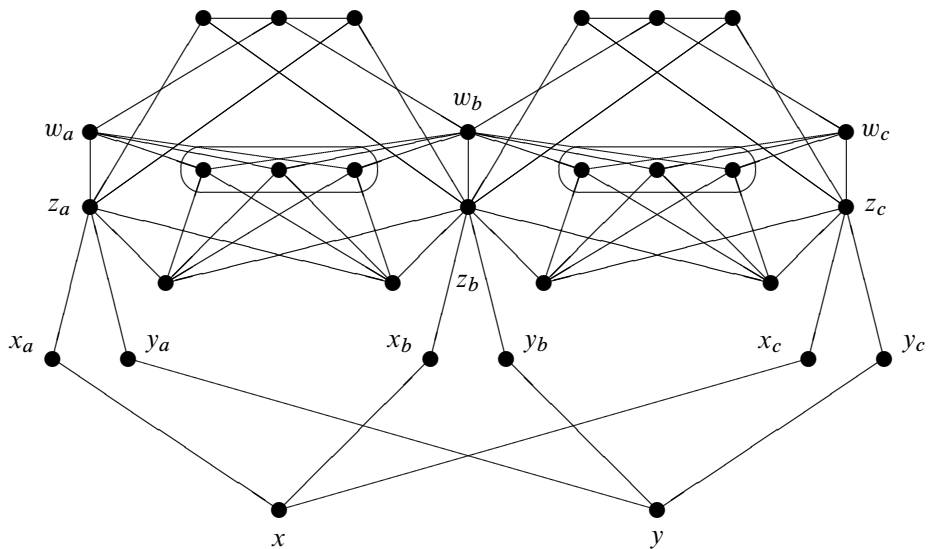


Figura 6.6: O grafo G construído a partir de $H = P_3$

fim, adicionamos x a S . É fácil verificar que S é um conjunto geodesicamente convexo, com pelo menos k' vértices, que não contém y , ou seja, $c(G) \geq k'$.

A seguir, assumimos que G tem um conjunto geodesicamente convexo S de ordem pelo menos k' que não contém todos os vértices de G . Definimos os seguintes conjuntos:

- $V_x = \{x_u \mid u \in V(H)\};$
- $V_y = \{y_u \mid u \in V(H)\};$
- $V_z = \{z_u \mid u \in V(H)\};$
- $V_w = \{w_u \mid u \in V(H)\}.$

Como $\text{con}_g(\{x, y\})$ contém todos os vértices de G , no máximo um entre x e y pertence a S . Se S contiver mais de n vértices de $V_x \cup V_y$, então existem vértices distintos u e v em H tais que x_u e y_v pertencem a S . Como $x, y \in I_g(\{x_u, y_v\})$, obtemos $x, y \in S$, o que é uma contradição. Portanto S contém no máximo n vértices de $V_x \cup V_y$.

Afirmção A: Se S contém três vértices de G_{uv} para alguma aresta uv de H , então S contém todos os vértices de G_{uv} .

A Afirmção A é imediata e não necessita de prova.

Afirmção B: S contém pelo menos dois vértices de V_z .

Prova da Afirmção B: Por contradição, assumamos que S contém no máximo um vértice de V_z . Usando a Afirmção A, segue-se facilmente que não existe aresta uv de H tal que

- ou $|S \cap \{z_u, w_u\}| + |S \cap V_{uv}| \geq 3;$
- ou $|S \cap \{z_u, w_u\}| \geq 1$ e $|S \cap \{z_v, w_v\}| \geq 1.$

Da mesma forma, não existem três vértices u, v e w de H tais que uv e vw são arestas de H e

$$|S \cap \{z_v, w_v\}| = 0, |S \cap V_{uv}| \geq 1 \text{ e } |S \cap V_{vw}| \geq 1.$$

Essas observações implicam que o conjunto de vértices u de H para o qual S intercepta $\{z_u, w_u\}$ forma um conjunto independente. Por hipótese, existe no máximo um vértice u de H para o qual S contém ambos os vértices z_u e w_u . Além disso, se uv e $u'v'$ são duas arestas de H tais que u e u' são distintos e S intersecta $\{z_u, w_u\}, \{z_{u'}, w_{u'}\}, V_{uv}$ e $V_{u'v'}$, então v e v' são distintos. Finalmente se S contém dois vértices de V_{uv} para alguma aresta uv de H , então S não contém nenhum vértice de $\{z_u, w_u, z_v, w_v\}$ ou de $V_{u'v'}$ para uma aresta $u'v'$ de H diferente de uv .

Essas observações implicam facilmente que S contém no máximo $n + 1$ vértices de

$$V_z \cup V_w \cup \bigcup_{uv \in E(H)} V_{uv}.$$

Juntamente com as observações anteriores à Afirmação A, concluímos, então, que $|S| \leq 2n + 2$. Como $k \geq 3$, isso é uma contradição. \square

Seja agora $C = \{u \in V(H) \mid z_u \in S\}$. Pela Afirmação B, o conjunto C contém pelo menos dois elementos. Se S contém dois vértices z_u e z_v tais que u e v não são adjacentes em H , então a distância de z_u e z_v em G é 4. Portanto x e y pertencem a S , o que é uma contradição. Portanto C é uma clique de H .

Assuma agora por absurdo que $|C| = t < k$. Seja S' a união dos conjuntos de vértices dos grafos G_{uv} para todos os pares de vértices distintos u e v em C . Note que S' contém exatamente $2t + (n + 5)\binom{t}{2}$ vértices. Como S é convexo, S' é um subconjunto de S .

Afirmação C: $S \setminus S'$ não contém vértices de $V_w \cup \bigcup_{uv \in E(H)} V_{uv}$.

Prova da Afirmação C: Por contradição, assumimos que S contém um vértice a desse conjunto.

Primeiramente assumamos que $a = w_u$ para algum vértice u de H . Pela definição de S' , $u \notin C$. Seja v algum vértice em C . Note que $I_g(\{w_u, z_v\})$ contém z_u , o que é uma contradição. Portanto a pertence a V_{uv} para alguma aresta uv de H .

Se $v \in C$, então, pela definição de S' , $u \notin C$, e a Afirmação A implica que S contém todos os vértices de G_{uv} , o que é uma contradição. Daí $u, v \notin C$.

Seja w algum vértice em C . Então $\text{con}_g(\{a, z_w\})$ contém z_u ou z_v , o que é uma contradição. Isto conclui a prova da afirmação. \square

Juntamente com as observações anteriores à Afirmação A, obtemos que S contém no máximo $2t + (n + 5)\binom{t}{2} + n + 1 < k'$ elementos, o que é uma contradição. Isso completa a demonstração do Teorema. \square

Trataremos agora do cálculo do número de convexidade geodésico de cografos. Veremos que, nesse caso particular, o problema pode ser resolvido em tempo polinomial.

Teorema 6.8 (Dourado, Protti, Rautenbach et al. 2012). *Seja G um cografo de ordem n .*

- (i) *Se G é conexo, $G_1, \dots, G_k, G_{k+1}, \dots, G_t$ são os subgrafos induzidos de G pelos vértices das componentes conexas do complemento de G , em que $|V(G_i)| \geq 2$ se, e somente se, $i \leq k$, e ω denota o tamanho de uma clique máxima de G , então*

$$\text{con}_g(G) = \begin{cases} n - 1 & , \text{ se } k = 0, \\ \text{con}_g(G_1) + t - 1 & , \text{ se } k = 1, \text{ e} \\ \omega & , \text{ se } k \geq 2. \end{cases}$$

- (ii) *Se G for desconexo, então*

$$\text{con}_g(G) = n - \min \{|V(H)| - \text{con}_g(H) \mid H \text{ é uma comp. conexa de } G\}.$$

Demonstração.

(i) Se $k = 0$, G é um grafo completo e $\text{con}_g(G) = n - 1$. Se $k = 1$, cada vértice u em G_2, \dots, G_t é adjacente a todos os vértices em $V(G) \setminus \{u\}$. Seja S um conjunto geodesicamente convexo de vértices de cardinalidade $\text{con}_g(G)$. Seja S_1 a interseção de S e o conjunto de vértices de G_1 . Claramente S_1 é um conjunto geodesicamente convexo em G_1 . Se S_1 é uma clique, então S_1 não contém todos os vértices do grafo G_1 , porque G_1 não é completo. Pela escolha de S , S contém todos os vértices em G_2, \dots, G_t . Se S_1 não for uma clique, então S contém todos os vértices em G_2, \dots, G_t , porque S é convexo. Portanto $\text{con}_g(\overline{G}) = \text{con}_g(G_1) + t - 1$.

Finalmente suponha $k \geq 2$. Seja S um conjunto geodesicamente convexo de vértices de cardinalidade $\text{con}_g(G)$. Se S contém dois vértices não adjacentes de algum G_j , então S contém todos os vértices de G fora de G_j . Portanto S contém dois vértices não adjacentes fora de G_j , o que implica que S contém todos os vértices de G_j , ou seja, S contém todos os vértices de G , o que é uma contradição. Portanto S é completo e $\text{con}_g(G) = \omega$.

(ii) Decorre diretamente do fato de que um conjunto geodesicamente convexo de vértices de G de cardinalidade $\text{con}_g(G)$ contém todos, exceto uma das componentes conexas de G . \square

Usando o Teorema 6.8 e decomposições modulares, pode-se calcular facilmente o número de convexidade geodésico de um cografo em tempo linear.

Ainda sobre o número de convexidade geodésico, Canoy Jr. e Garces (2002) estudam esse parâmetro para grafos obtidos a partir de diversas operações entre grafos. Kim (2004) apresenta limitantes para grafos regulares. Chartrand e Zhang (1999) mostram uma desigualdade do tipo Nordhaus e Gaddum (1956)³, para o número de convexidade geodésico, ao mostrar que $\text{con}_g(G) + \text{con}_g(\overline{G}) \leq 2(n(G) - 1)$, e caracterizam os grafos que atingem a igualdade. Tal resultado é aprofundado por Gimbel (2003), que mostra um limitante inferior assintoticamente ótimo para $\text{con}_g(G) + \text{con}_g(\overline{G})$, além de também mostrar uma redução de NP-completude para decidir se $\text{con}_g(G) \geq k$. Gimbel (ibid.) ainda apresenta um limitante do tipo Ramsey para esse parâmetro, ao mostrar limitantes para o menor número de vértices de um grafo G tal que $\text{con}_g(G) \geq i$ ou $\text{con}_g(\overline{G}) \geq j$ para inteiros i, j dados. Há limitantes para o número de convexidade geodésico apresentados em Dourado, Protti, Rautenbach et al. (2012) e Padmavathi (2015). Mais recentemente, há trabalhos sobre o número de convexidade geodésico de grafos $(q, q - 4)$ (Dourado, Penso e Rautenbach 2017) e de grafos prismas complementares (Castonguay et al. 2019; Neethu P. K. e Chandran S. V. 2022).

6.3 Outros parâmetros

³As famosas desigualdades de Nordhaus–Gaddum apresentam limitantes inferiores e superiores para $\chi(G) + \chi(\overline{G})$ e para $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$, sendo $\chi(G)$ o número cromático de G . Há diversas desigualdades similares na literatura. Para um *survey* no tema, veja Aouchiche e Hansen (2013).

Números de Carathéodory, Radon e Helly

A seguir, apresentamos alguns resultados para os números de Carathéodory, Radon e Helly quando restritos à convexidade geodésica. Exemplos de determinação desses parâmetros podem ser encontrados na Seção 3.4.

Número de Carathéodory Geodésico. Quando restrito à convexidade geodésica, diremos que o *número de Carathéodory geodésico* de um grafo G , denotado por $\text{cth}_g(G)$, é o menor inteiro $r \geq 0$ tal que, para todo subconjunto $S \subseteq V(G)$ e todo vértice $u \in \text{conv}_g(S)$, existe um subconjunto $F \subseteq S$ com $|F| \leq r$ e $u \in \text{conv}_g(F)$. Também é definido como o tamanho do maior conjunto Carathéodory independente na convexidade geodésica. Lembre que, como definido na Seção 3.4, um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é Carathéodory independente na convexidade geodésica se o conjunto

$$\partial(\text{conv}_g(S)) = \text{conv}_g(S) \setminus \left(\bigcup_{s \in S} \text{conv}_g(S \setminus \{s\}) \right)$$

for não vazio.

Em vista de tal definição, do ponto de vista do estudo da complexidade computacional relacionada ao número de Carathéodory geodésico, há dois problemas de decisão que são diretamente relacionados. Infelizmente ambos são intratáveis.

NÚMERO DE CARATHÉODORY GEODÉSICO

Entrada: Grafo G e inteiro $k \geq 0$.
Pergunta: $\text{cth}_g(G) \leq k$?

Teorema 6.9 (Dourado, Rautenbach, dos Santos, Schäfer e Szwarcfiter (2013)). *O NÚMERO DE CARATHÉODORY GEODÉSICO é NP-completo.*

NÚMERO DE CARATHÉODORY GEODÉSICO LOCAL

Entrada: Grafo G , $U \subseteq V(G)$, $u \in \text{conv}_g(U)$ e inteiro $k \geq 0$.
Pergunta: Existe $F \subseteq U$ tal que $|F| \leq k$ e $u \in \text{conv}_g(F)$?

Teorema 6.10 (Dourado, Rautenbach, dos Santos, Schäfer e Szwarcfiter (ibid.)). *O NÚMERO DE CARATHÉODORY GEODÉSICO LOCAL é NP-completo, mesmo que G seja bipartido.*

Enquanto que a demonstração do Teorema 6.9 é mais elaborada, a demonstração do Teorema 6.10 é mais simples, apoiando-se fortemente no fato de decidir se $\text{hn}_g(G) \leq k$ é NP-completo mesmo que G seja bipartido e possua um vértice de grau 1 (Araújo, Campos et al. 2013).

Por outro lado, os mesmos autores mostram que se G for um grafo split, então $\text{cth}_g(G)$ pode ser calculado em tempo polinomial, em função do seguinte resultado.

Teorema 6.11 (Dourado, Rautenbach, dos Santos, Schäfer e Szwarcfiter (2013)). *Se G é um grafo split, então $\text{cth}_g(G) \leq 3$.*

Demonstração. Seja G um grafo split e sejam C e I uma clique e um conjunto independente de G tais que $\{C, I\}$ é partição de $V(G)$. Seja $U \subseteq V(G)$ um subconjunto Carathéodory independente de G . Vamos provar que $|U| \leq 3$ e, portanto, $\text{cth}_g(G) \leq 3$, já que $\text{cth}_g(G)$ é a cardinalidade de um conjunto Carathéodory independente máximo de G . Seja $v \in \partial(\text{conv}_g(U))$, ou seja, $v \in \text{conv}_g(S)$ e $v \notin \cup_{s \in S} \text{conv}_g(S \setminus \{s\})$. Seja k o menor inteiro tal que $v \in I_g^k(U)$, ou seja, o inteiro tal que $v \in I_g^k(U) \setminus I_g^{k-1}(U)$. Se $k \leq 1$, então $v \in U$ ou v pertence a um u, w -caminho mínimo de G para $u, w \in U$. No primeiro caso, temos que $U = \{v\}$, pois esse é o único caso em que $v \in S$ e $v \notin \cup_{s \in S} \text{conv}_g(S \setminus \{s\})$. No segundo caso, temos $U = \{u, v\}$, porque essa é a única forma em que $v \in I_g(u, v)$ e $v \notin \cup_{s \in S} \text{conv}_g(S \setminus \{s\})$. Então podemos assumir que $k \geq 2$.

Uma vez que nenhum vértice do conjunto independente I pertence a um caminho mais curto entre dois outros vértices de U , o conjunto $\text{conv}_g(U) \setminus U$ não contém nenhum elemento de I . Isto implica que $v \in C$. Uma vez que $k \geq 2$, o vértice v pertence a um caminho mais curto entre dois vértices u_{k-1} e w_k em $I_g^{k-1}(U)$. Portanto um dos dois vértices, digamos w_k , pertence a $U \cap I$. Além disso, pela minimalidade de k , o outro vértice u_{k-1} pertence a $I_g^{k-1}(U) \setminus I_g^{k-2}(U)$ e, portanto, $u_{k-1} \in C$. De modo similar, uma vez que $k \geq 2$, o vértice u_{k-1} pertence a um caminho mais curto entre dois vértices u_{k-2} e w_{k-1} em $I_g^{k-2}(U)$. Como antes, podemos assumir que $w_{k-1} \in U \cap I$. Se $k \geq 3$, então isso implica que u_{k-2} pertence a $I_g^{k-2}(U) \setminus I_g^{k-3}(G)$. Repetindo esse argumento, obtemos vértices u_0, \dots, u_{k-1} e w_1, \dots, w_k satisfazendo:

- $u_0 \in U, u_1, \dots, u_{k-1} \in C, w_1, \dots, w_k \in U \cap I$;
- $u_i \in I_g(\{u_{i-1}, w_i\})$ e $u_i \in I_g^i(U) \setminus I_g^{i-1}(U)$, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Como $v \in \text{conv}_g(\{u_0, w_1, \dots, w_k\})$ e queremos provar que $|U| \leq 3$, podemos assumir que $k \geq 3$. Pela minimalidade de k , o vértice u_i é vizinho de w_k para $i \in \{1, \dots, k-2\}$, caso contrário $v \in \{u_i, w_k\}$ e, portanto, $v \in I_g^{i+1}(U)$, uma contradição. De modo similar, o vértice u_i é um vizinho de w_{k-1} para todo $i \in \{1, \dots, k-3\}$, se não $u_{k-1} \in I_g(\{u_i, w_{k-1}\})$ e, então, $v \in I_g^{i+2}(U)$, uma contradição.

Se $k = 3$, então $u_1 \in I_g(\{w_1, w_3\})$, $u_2 \in I_g(\{u_1, w_2\})$ e $v \in I_g(\{u_2, w_3\})$ e, então, $|U| = 3$. Caso $k \geq 4$, então note que $u_{k-3} \in I_g(\{w_{k-1}, w_k\})$, $u_{k-2} \in (\{u_{k-3}, w_{k-2}\})$, $u_{k-1} \in I_g(\{u_{k-2}, w_{k-1}\})$ e $v \in I_g(\{u_{k-1}, w_k\})$. Desse fato, é possível deduzirmos que $v \in \text{conv}_g(\{w_{k-2}, w_{k-1}, w_k\})$ e, portanto, $|U| = 3$. \square

Em (Lira 2016) é estudado o número de Carathéodory geodésico de diversas classes de grafos particulares, como árvores e cografos; prismas complementares de algumas famílias de grafos simples; além do produto cartesiano de algumas classes de grafos simples. Dourado, Penso e Rautenbach (2017) mostram que, para um inteiro fixo $q \geq 4$, $\text{cth}_g(G)$ pode ser calculado em tempo polinomial se G é um $(q, q-4)$ -grafo, sendo grafos que cada subgrafo induzido com q vértices possui no máximo $q-4$ caminhos com 4 vértices distintos. Já mais recentemente, Anand, Chandran S. V., Changat, Dourado et al. (2020) mostram algoritmos polinomiais para calcular o número de Carathéodory geodésico para grafos de intervalos e para potências de caminhos.

Número de Radon Geodésico. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *Radon dependente geodesicamente* se existe uma partição de S em dois conjuntos S_1 e S_2 satisfazendo $\text{conv}_g(S_1) \cap \text{conv}_g(S_2) \neq \emptyset$; e *Radon independente geodesicamente* caso contrário. O *número de Radon geodésico* $\text{rd}_g(G)$ é o tamanho do maior conjunto Radon independente geodesicamente.

Deve-se lembrar, como mencionado na Seção 3.4, que toda clique é um conjunto Radon independente geodesicamente na convexidade geodésica. Logo $\text{rd}_g(G) \geq \omega(G)$.

Determinar $\text{rd}_g(G)$ é não somente um problema NP-difícil, mas, a menos que $P = NP$, não há algoritmo aproximativo com fator $n(G)^{1-\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$, que determine $\text{hl}_g(G)$, mesmo que G seja bipartido (Dourado e da Silva 2017). O número de Radon geodésico de grades d -dimensionais G foi estudado por Dourado, Rautenbach, de Sá et al. (2013), em que os autores mostram limitantes, e por Dourado, de Sá et al. (2016), que apresentam um algoritmo polinomial para determinar $\text{rd}_g(G)$. Dourado, Penso e Rautenbach (2017) mostram que, para um inteiro fixo $q \geq 4$, $\text{rd}_g(G)$ pode ser calculado em tempo polinomial se G é um $(q, q-4)$ -grafo, assim como já mencionado previamente para o número de Carathéodory geodésico. Moran e Yehudayoff (2020) relacionam limitantes sobre o número de Radon geodésico a existência de ϵ -redes fracas.

Número de Helly Geodésico. O *número de Helly geodésico*, denotado por $\text{hl}_g(G)$, é o tamanho do maior subconjunto *Helly independente geodesicamente* $S \subseteq V(G)$, que são os conjuntos tais que $\bigcap_{v \in S} \text{conv}_g(S \setminus \{v\}) = \emptyset$. Equivalentemente se $\text{hl}_g(G) \geq 2$, então $\text{hl}_g(G)$ é o menor inteiro h tal que se \mathcal{F} é a família de subconjuntos geodesicamente convexos de $V(G)$ e, para cada subfamília \mathcal{F}' com h membros de \mathcal{F} temos que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$, então $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Lembre que o Teorema 3.2 mostra que $\text{hl}_g(G) \geq 2$ para todo grafo G com pelo menos dois vértices.

Como mencionado na Seção 3.4, o número de Helly na convexidade monofônica é igual a $\omega(G)$, para todo grafo G (vide Teorema 3.1). Desse fato, segue que $\text{hl}_g(G) = \omega(G)$ para todo grafo distância hereditária G pelo Lema 2.3. Como observado por Bandelt e Mulder (1990), não é difícil construir grafos em que $\text{hl}_g(G) > \omega(G)$ (vide Exercício 6.8).

Boa parte da literatura a respeito do número de Helly geodésico dedica-se a determinar classes de grafos para as quais $\text{hl}_g(G) = \omega(G)$. Cepoi (1986) demonstrou que tal igualdade também é válida para grafos cordais usando o esquema de eliminação simplicial. Bandelt e Mulder (1990) generalizam os resultados supramencionados para grafos distância-hereditária e grafos cordais, ao mostrar que tal igualdade também vale para as classes de grafos *dismantlable* e *pseudo-modular*. Bandelt e Chepoi (1996) generalizam esses resultados ao provar a mesma igualdade no contexto de espaços fracamente modulares discretos. Em uma série de artigos, Polat generaliza as ideias de Bandelt e Mulder (1990) para outras classes de grafos finitos e infinitos (Polat 1995, 2000, 2003).

Mais recentemente, aspectos computacionais de determinação do número de Helly geodésico foram abordados. Como mencionado no Teorema 5.3, determinar o número de Helly geodésico de um grafo é um problema NP-difícil. Mais do que isso, a menos

que $P = NP$, não há algoritmo aproximativo com fator $n(G)^{1-\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$, que determine $hl_g(G)$, mesmo que G seja bipartido (Dourado e da Silva 2017). da Silva (2014) implementou um algoritmo para determinar o número de Helly geodésico de grafo G e também retorna um certificado que mostra tal grafo não é $(hl_g(G) - 1)$ -Helly. Em sua dissertação, da Silva (ibid.) também apresenta um limitante apertado para $hl_g(G)$, quando G é bipartido, além de limitantes e valores exatos para certas classes de grafos restritos.

Já em Carvalho (2016), algumas classes particulares de grafos também têm seu número de Helly geodésico determinado, como árvores, ciclos, grafos k -partidos completos, grafos completos de dimensão d e grafos prisma, além de uma caracterização para grafos completos. O autor também apresenta um limitante inferior e superior para $hn_g(G)$ e mostra que decidir se um grafo é p -Helly é *co-NP*-completo para p variável. Finalmente apresenta formas de calcular o número de Helly geodésico de um grafo qualquer a partir da determinação do parâmetro para certos subgrafos.

Número de Posição Geral e Posto

Como visto na Seção 3.5, o número de posição geral foi introduzido na convexidade geodésica, motivado pelo problema *No-Three-in-Line* de Dudeney (1917). Manuel e Klavžar (2018) provaram que esse parâmetro é *NP*-completo. Uma prova mais simples pode ser vista no Teorema 5.3.

Os grafos com número de posição geral geodésica 2 , $n - 1$ e n foram caracterizados em Thomas e Chandran S. V. (2020). O número de posição geral geodésica foi estudado em grafos Kneser (Ghorbani et al. 2021; Patkós 2020), em cacti e grafos roda (*wheel graphs*) (Yao, He e Ji 2022) e em produtos cartesianos de grafos simples (Tian e Xu 2021; Tian, Xu e Klavžar 2021).

O posto geodésico foi introduzido por Jamison (1981) e provado *NP*-difícil em Kanté, Sampaio et al. (2017).

Tempos de Iteração e Percolação

O tempo de iteração foi introduzido por Harary e Nieminem (1981) na convexidade geodésica. Em Dourado, Oliveira, Protti e Rautenbach (2016), foi obtido um algoritmo polinomial em grafos distância hereditária para computar um conjunto com tempo de iteração geodésico máximo. Moscarini (2020) estendeu esse resultado com um algoritmo de tempo $O(n^3m)$ em grafos distância hereditária e um algoritmo de tempo $O(n^2m)$ em grafos distância hereditária bipartidos.

O tempo de percolação foi proposto pelo matemático Béla Bollobás na convexidade P_3 sobre grades quadradas, problema que foi resolvido por Benevides e Przykucki (2013). Na convexidade geodésica, Benevides, Campos et al. (2016) obtiveram um algoritmo polinomial em grafos distância hereditária e provaram que é *NP*-completo decidir se $tp_g(G) \geq 2$ mesmo em grafos bipartidos.

6.4 Exercícios

Exerc. 6.1. Apresente um algoritmo em pseudocódigo para, dados um grafo G e um subconjunto $S \subseteq V(G)$, retornar $\text{conv}_g(S)$ cuja complexidade seja $\mathcal{O}(|S| \cdot m(G))$.

Exerc. 6.2. Demonstre o Teorema 6.1.

Exerc. 6.3. Dados inteiros α e β tais que $2 \leq \alpha \leq \beta$, encontre um grafo tal que $\text{hn}_g(G) = \alpha$ e $\text{in}_g(G) = \beta$.

Exerc. 6.4. Mostre que o NÚMERO DE INTERVALO GEODÉSICO pertence a NP.

Exerc. 6.5. Mostre que o grafo G' construído na demonstração do Teorema 6.4 é cordal.

Exerc. 6.6. Sejam G um grafo não completo, S um conjunto de envoltória ou um conjunto de intervalo de cardinalidade mínima na convexidade geodésica de G e v um vértice universal de G . Mostre que $v \notin S$.

Exerc. 6.7. Demonstre o Teorema 6.6.

Exerc. 6.8. Seja G o grafo obtido do grafo completo K_n com n vértices pela subdivisão de cada aresta uma única vez. Mostre que $2 = \omega(G) < \text{hl}_g(G) = n$.

7

Outras Convexidades

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados de outras convexidades em grafos amplamente estudadas.

7.1 Convexidade Monofônica

Lembramos que um conjunto de vértices S de um grafo G é convexo na convexidade monofônica ou m -convexo se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho induzido entre dois vértices de S . Note que uma clique é um conjunto m -convexo.

A convexidade monofônica foi introduzida por Jamison (1982) e vários resultados teóricos foram obtidos em Duchet (1988), Farber e Jamison (1986) e Jamison e Nowakowski (1984). Por exemplo, como visto na Seção 3.4, Jamison e Nowakowski (1984) e Duchet (1988) provaram que o número de Helly monofônico é sempre igual ao tamanho da maior clique em qualquer grafo.

Com relação à complexidade computacional, Dourado, Protti e Szwarcfiter (2010) provaram que o número de intervalo e de convexidade são NP-difíceis na convexidade monofônica. Nesse mesmo trabalho, os autores apresentaram um algoritmo de complexidade $O(n^3m)$ para computar o número de envoltória nessa convexidade para grafos gerais. Usando os resultados de Leimer (1993), Benevides, Campos et al. (2016) adaptaram esse algoritmo diminuindo sua complexidade para $O(nm)$. Costa, Dourado e Sampaio (2015) provaram que decidir se o número de intervalo é no máximo 2 e decidir se o tempo de

percolação é no máximo 1 são problemas NP-completos. Provaram ainda que o número de convexidade é W[1]-difícil e $n^{1-\varepsilon}$ -inaproximável para todo $\varepsilon > 0$, mas polinomial em grafos perfeitos e em grafos planares.

O posto foi estudado em Dourado, Ponciano e da Silva (2022), em que os autores mostraram que esse parâmetro pode ser computado em tempo polinomial para as classes de bipartido, cactos, grafos sem triângulo, grafos linha e grafos split, sendo esse problema NP-completo para grafos gerais.

Apresentamos a seguir uma caracterização dos conjuntos m-convexos.

Teorema 7.1 (Dourado, Protti e Szwarcfiter 2010). *Seja G um grafo. Um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.*

Demonstração. Assuma que S é m-convexo. A existência de um par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e uma componente conexa C de $G - S$, para os quais existem vértices u', v' tais que $u' \in V(C) \cap N(u)$ e $v' \in V(C) \cap N(v)$, implica a existência de uma sequência de vértices $w_0 = u, w_1 = u', w_2, \dots, w_{k-1}, w_k = v', w_{k+1} = v$ com $k \geq 1$ satisfazendo: (i) $w_i \notin S, 1 \leq i \leq k$; (ii) $u' = v'$ ou $(w_i, w_{i+1}) \in E(G - S), 1 \leq i \leq k$. Portanto existe um caminho induzido ligando u e v o qual contém pelo menos um vértice fora de S , o que é uma contradição.

Considere agora que S não é m-convexo. Seja $w_0 = u, w_1, \dots, w_k, w_{k+1} = v$ um caminho induzido ligando vértices $u, v \in S$ tal que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Seja j um índice tal que $w_{j-1} \in S$ e $w_j, w_{j+1}, \dots, w_i \in V(G) \setminus S$. Tal índice existe uma vez que $u \in S$. Analogamente seja ℓ um índice tal que $w_i, w_{i+1}, \dots, w_\ell \in V(G) \setminus S$ e $w_{\ell+1} \in S$. Isso implica que $w_{j-1}, w_{\ell+1}$ é um par de vértices não adjacentes de S e existe uma componente conexa C de $G - S$ tal que $V(C) \cap N(w_{j-1}) \neq \emptyset$ e $V(C) \cap N(w_{\ell+1}) \neq \emptyset$. \square

Usamos o resultado acima para mostrar que podemos responder em tempo polinomial se um conjunto é m-convexo ou não.

Corolário 7.1 (ibid.). *Seja G um grafo. Decidir se um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo pode ser feito em tempo $O(nm)$.*

Demonstração. Descrevemos um algoritmo para decidir se $S \subseteq V(G)$ é m-convexo com complexidade $O(mn)$. Computar as componentes conexas de $G - S$ pode ser feito em tempo $O(n+m)$. No pior caso, teremos $O(n)$ componentes conexas, digamos C_1, \dots, C_k . Defina os conjuntos C'_1, \dots, C'_k inicialmente vazios. Em seguida, para cada aresta $uw \in E(G)$ tal que $u \in S$ e $w \notin S$, inclua u no conjunto C'_i se $w \in C_i$. Isto é, C'_i é o subconjunto de S formado pelos vértices que têm pelo menos um vizinho em C_i . Se C'_i contém dois vértices não adjacentes, pare respondendo que S não é m-convexo. Se esse processo termina e todo $C'_j, 1 \leq j \leq k$, é uma clique, então responda que S é m-convexo. \square

Terminamos mostrando que o problema do NÚMERO DE INTERVALO MONOFÔNICO é NP-completo. Nesse problema, a instância é um grafo G e inteiro positivo k , e a pergunta

é: existe um subconjunto S de $V(G)$ com pelo menos k vértices que é um conjunto de intervalo na convexidade monofônica?

Teorema 7.2 (ibid.). *O NÚMERO DE INTERVALO MONOFÔNICO é NP-completo.*

Demonstração. O problema está em NP porque testar se um subconjunto $S \subseteq V(G)$ com $|V(G)| > |X| \geq k$ é m-convexo pode ser feito em tempo polinomial pelo Corolário 7.1.

Para mostrar que esse problema é NP-difícil, apresentamos uma redução do problema CLIQUE (Karp 1972): dado um grafo H e um inteiro positivo ℓ , decidir se H contém uma clique de tamanho pelo menos ℓ . Podemos assumir que $\ell < |V(H)| - 1$. Construa um grafo G a partir de H da seguinte forma. Defina $V(G) = V(H) \cup \{u, v\}$, sendo u e v vértices novos, e $E(G) = E(H) \cup \{(u, x), (v, x) \mid x \in V(H)\}$. Também defina $k = \ell + 1$.

Vamos mostrar que H tem uma clique com pelo menos ℓ vértices se, e somente se, G tem um conjunto m-convexo com pelo menos $k = \ell + 1$ vértices.

Se $S \subseteq V(H)$ é uma clique de tamanho pelo menos ℓ , então $Y = S \cup \{u\}$ é uma clique de G e, portanto, é um conjunto m-convexo de tamanho pelo menos $\ell + 1$.

Reciprocamente seja Y um subconjunto próprio de $V(G)$ que é m-convexo de tamanho pelo menos $\ell + 1$. Observe que Y não pode conter ambos u e v , porque se contivesse, teríamos $Y = V(G)$. Isso significa que Y não contém dois vértices não adjacentes w_1 e w_2 , pois isso implicaria que u e v pertenceriam a Y . Portanto $Y \setminus \{u, v\}$ é uma clique de tamanho pelo menos ℓ em H . \square

Um grafo G é *split* se $V(G)$ pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente I . Mostramos a seguir como encontrar o posto de um grafo *split* na convexidade monofônica em tempo polinomial. Sabe-se que esse problema NP-completo para grafos gerais (Dourado, Ponciano e da Silva 2022).

Teorema 7.3 (ibid.). *O posto de um grafo split pode ser encontrado em tempo polinomial na convexidade monofônica.*

Demonstração. Como CONJUNTO INDEPENDENTE (Garey e Johnson 1979) pertence a P para grafos bipartidos, é suficiente mostrar uma redução polinomial de POSTO na convexidade monofônica restrito a grafos *split* para CONJUNTO INDEPENDENTE restrito a grafos bipartidos.

Seja G um grafo *split* com bipartição (C, I) . Podemos assumir que C é uma clique máxima. Construa um grafo bipartido G' a partir de uma cópia de G , removendo todas as arestas entre vértices de C . Denote por (C', I') a bipartição de G' em que $C' = \{v'_i : v_i \in C\}$. Veja a Figura 7.1. Mostraremos que G tem um conjunto m-convexamente independente de tamanho pelo menos k se, e somente se, G' tem um conjunto independente de tamanho pelo menos k .

Primeiro seja S um conjunto m-convexamente independente de tamanho pelo menos k de G . Se $|S| \leq |C|$, então G' tem um conjunto independente com pelo menos k vértices contidos em C' porque C' é um conjunto independente. Então, considere $|S| > |C|$ e defina $S' = \{v'_i : v_i \in S\}$. Se S' é um conjunto independente, então S' é o conjunto

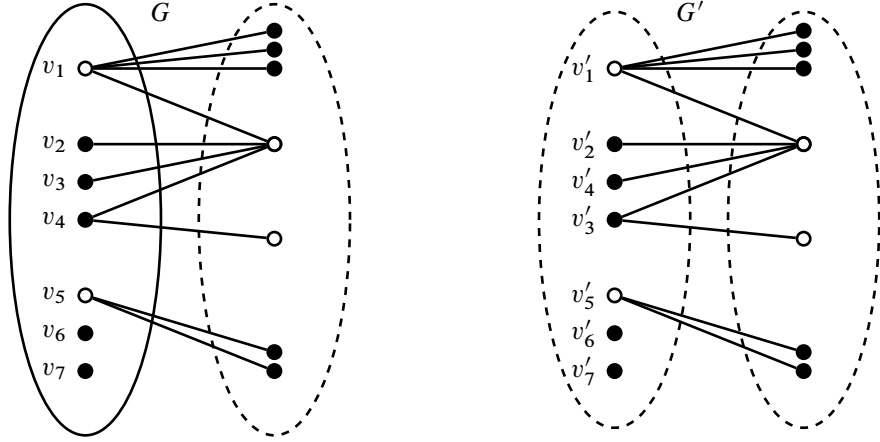


Figura 7.1: Redução de POSTO na convexidade monofônica restrita a grafos split para CONJUNTO INDEPENDENTE restrito a grafos bipartidos. Os vértices dentro da oval definida por uma linha contínua formam uma clique.

desejado. Então considere que $v'_i v'_j \in E(G')$ para $v'_i, v'_j \in S'$. Pela construção de G' , sem perda de generalidade, podemos assumir que $v_j \in C$ e $v_i \in I$. Como S é m -convexamente independente, v_i é adjacente a todos os vértices de $S \cap C$. Como $|S| > |C|$ e C é clique máxima, temos que existe $v_\ell \in C \setminus S$, o que implica que $(S \cap I) \setminus \{v_i\} \neq \emptyset$. Também sabemos que todo vértice de $(S \cap I) \setminus \{v_i\}$ não tem vizinhos em $(S \cap C) \cup \{v_\ell\}$. Então $(S' \setminus \{v_i\}) \cup \{v_\ell\}$ é um conjunto independente de tamanho $|S|$ como desejado.

Reciprocamente seja S' um conjunto independente de G' com pelo menos k vértices. Defina $S = \{v_i : v'_i \in S'\}$. Observe que

$$\text{conv}(S \setminus \{v_i\}) \subseteq (S \setminus \{v_i\}) \cup \left(\bigcup_{v_j \in (S \setminus \{v_i\}) \cap I} N(v_j) \right).$$

Como S' é um conjunto independente, temos que $v_i \notin \text{conv}(S \setminus \{v_i\})$, o que significa que S é um conjunto m -convexamente independente de G . \square

7.2 Convexidade Triangular

Em um *caminho triangular* v_1, \dots, v_t de um grafo G não existem arestas ligando vértices v_i e v_j tais que $|j - i| > 2$. Assim um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade triangular* ou t -convexo se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho triangular entre dois vértices de S .

Observe que $\text{conv}_g(S) \subseteq \text{conv}_m(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$ e $\text{conv}_{P_3}(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$, o que implica que todo conjunto t -convexo também é g -convexo, m -convexo e P_3 -convexo.

Essa convexidade foi introduzida em Bandelt (1989), em que alguns resultados relacionados à noção de semiespaço foram obtidos. Em Changat e Mathews (1999) foram determinados os valores dos números de Carathéodory, Helly e Radon nessa convexidade para grafos gerais. Essa convexidade também foi considerada em Changat, Mulder e Sierksma (2005) e Changat, Prasanth e Mathews (2009).

Dourado e Sampaio (2016) apresentaram algoritmos polinomiais para encontrar o número de convexidade e o número de envoltória de grafos gerais. Vale ressaltar que, para muitas convexidades, os problemas de determinar o número de envoltória e o número de convexidade são NP-completos para grafos gerais. Nesse mesmo trabalho, os autores mostraram que determinar o número de intervalo é NP-completo para essa convexidade mesmo para grafos bipartidos. Esse trabalho também contém uma caracterização dos conjuntos t -convexos que leva a um algoritmo polinomial de tais conjuntos. Apresentamos essa caracterização e suas consequências a seguir.

Teorema 7.4 (ibid.). *Um conjunto de vértices S de um grafo G é t -convexo se, e somente se, não existe vértice fora de S tendo dois vizinhos em S e não existem dois vértices não adjacentes de S que têm vizinhos numa mesma componente conexa de $G - S$.*

Demonstração. Seja $S \subset V(G)$ um conjunto t -convexo. Se existe um vértice $v \notin S$ tendo vizinhos $u, w \in S$, então uvw é um caminho triangular de G ligando dois vértices de S tal que nem todos vértices estão em S , o que implicaria que S não é t -convexo. Considere agora que existem vértices $u, v \in S$ e $u', v' \notin S$ tais que $uv \notin E(G)$, $u' \in N_G(u)$, $v' \in N_G(v)$ e $u', v' \in V(C)$ para alguma componente conexa C de $G - S$. Se $u' = v'$, então $uu'v$ é um caminho triangular como no primeiro caso. Então podemos assumir que $u' \neq v'$ e u e v não têm vizinhos comuns em C . Além disso, sem perda de generalidade, podemos assumir que u' e v' podem ser escolhidos minimizando a distância entre eles. Agora seja $P = u'w_1 \dots w_kv'$ para $k \geq 0$ um caminho mínimo C . Pelas escolhas de u', v' e P , nenhum vértice interno de P é vizinho de u ou de v . Portanto $uu'w_1 \dots w_kv'v$ é um caminho induzido e, assim, um caminho triangular de G , o que implicaria que S não é um conjunto t -convexo.

Assuma agora que S não é um conjunto t -convexo. Então existe um caminho triangular $uw_1 \dots w_kv$ ligando os vértices $u, v \in S$ tais que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Se $uv \in E(G)$, então $k = 1$ e w_1 é um vértice fora de S que tem dois vizinhos em S . Caso contrário, como $P' = w_1 \dots w_k$ é um caminho de $G - S$, todos os vértices de P' pertencem a mesma componente conexa de $G - S$. Então S tem dois vértices não adjacentes, u e v , que têm vizinhos numa mesma componente conexa de $G - S$. \square

Uma consequência interessante do resultado acima é poder caracterizar os conjuntos t -convexos em termos dos conjuntos m -convexos e P_3 -convexos.

Corolário 7.2 (ibid.). *Um conjunto de vértices S de um grafo G é t -convexo se, e somente se, S é m -convexo e P_3 -convexo.*

Demonstração. Como observado acima, as definições implicam que todo conjunto t -convexo é m -convexo e também P_3 -convexo. Agora considere que S é um conjunto m -convexo e P_3 -convexo e suponha por absurdo que S não é t -convexo. O fato de S ser P_3 -convexo implica que não existe vértice fora de S tendo dois vizinhos em S . Como S não é t -convexo, pelo Teorema 7.4, existem dois vértices não adjacentes de S que têm vizinhos numa mesma componente conexa de $G - S$. Porém, como S é m -convexo, o Teorema 7.1 implica que não existem dois vértices não adjacentes de S que têm vizinhos numa mesma componente conexa de $G - S$, o que é uma contradição. \square

Usando os resultados acima, podemos testar se um conjunto é t -convexo em tempo polinomial.

Corolário 7.3 (Dourado e Sampaio 2016). *Podemos testar se um conjunto de vértices S de um grafo G de ordem n e tamanho m é t -convexo em $O(nm)$ passos.*

Demonstração. Pelo Corolário 7.2, é suficiente testar se S é P_3 -convexo e m -convexo. Deixamos como exercício mostrar que testar se S é P_3 -convexo pode ser feito em tempo $O(n^2)$. Para completar a prova, basta aplicar o Corolário 7.1. \square

7.3 Convexidade de todos os caminhos

Um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade de todos os caminhos* ou tc -convexo se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho entre dois vértices de S . A convexidade de todos os caminhos foi considerada em uma série de artigos (Changat, Klavzar e Mulder 2001; Gutin e Yeo 2009; Protti e Thompson 2023; Sampathkumar 1984).

Para anunciar os resultados desta seção, necessitaremos das seguintes definições. Considere a decomposição em blocos de um grafo G , representada pela *árvore bloco-articulação* T_G . Essa árvore é definida da seguinte forma: cada vértice de T_G está associado a um bloco B_j (uma aresta de corte ou um subgrafo 2-conexo maximal de G) ou a um vértice de corte (articulação) $z_i \in V(G)$. Além disso, existe uma aresta ligando um vértice B_j a um vértice z_i em T_G sempre que o bloco B_j contenha o vértice de corte $z_i \in V(G)$. Essa definição implica que os vértices de T_G associados a blocos de G formam um conjunto independente, e o mesmo ocorre para os vértices de T_G associados a vértices de corte de G (Exercício 7.1). Além disso, cada folha de T_G representa um bloco de G . Um *bloco terminal* de G é um bloco associado a uma folha de T_G .

Para um conjunto $S \subseteq V$, seja T_S a subárvore maximal de T_G tal que cada folha de T_S esteja associada a um bloco de G contendo um vértice de S que não seja um vértice de corte no subgrafo G_S induzido por $\cup_{B_j \in V(T_S)} B_j$. A Figura 7.2 a seguir mostra um exemplo.

Precisaremos também do seguinte lema, apresentado sem demonstração:

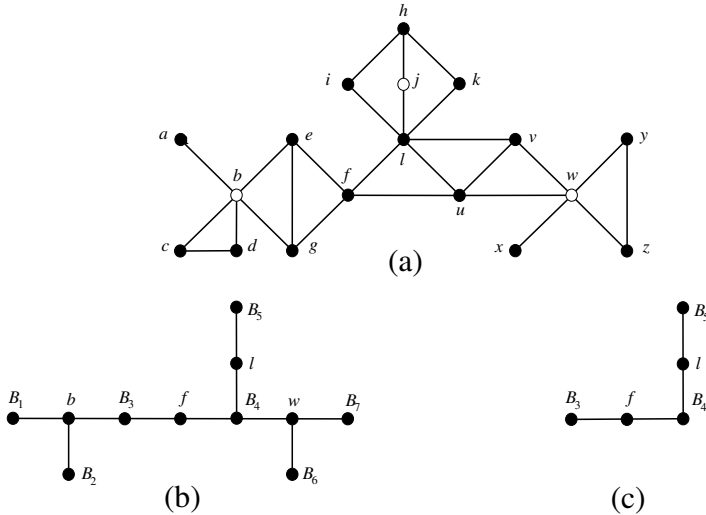


Figura 7.2: (a) Um grafo G e um subconjunto $S = \{b, j, w\}$ (representado pelos vértices brancos), cujos blocos são tais que $V(B_1) = \{a, b\}$, $V(B_2) = \{b, c, d\}$, $V(B_3) = \{b, e, g, f\}$, $V(B_4) = \{f, l, u, v, w\}$, $V(B_5) = \{h, i, j, k, l\}$, $V(B_6) = \{w, x\}$, $V(B_7) = \{w, y, z\}$; (b) árvore bloco-articulação T_G ; (c) subárvore T_S de T_G . O bloco B_3 é uma folha de T_S porque não contém nenhum vértice de corte no grafo G_S induzido por $V(B_3) \cup V(B_4) \cup V(B_5)$.

Lema 7.1 (Protti e Thompson 2023). *Sejam $S \subseteq V$ e u, w dois vértices distintos em S , pertencentes aos blocos B_u e B_w de T_S respectivamente. Assuma que u e w não são vértices de corte em G_S . Seja $B_{j_1} z_1 B_{j_2} z_2 \dots z_{k-1} B_{j_k}$ um caminho em T_S entre $B_{j_1} = B_u$ e $B_{j_k} = B_w$. Então, para cada $v \in \cup_{i=1}^k V(B_{j_i})$, existe um caminho P em G de u a w passando por v .*

Vamos nos concentrar agora no problema de determinar o número de convexidade de um grafo G na convexidade de todos os caminhos, denotado por $\text{cont}_{\text{tc}}(G)$.

Para um bloco terminal B_j de G , seja $|V(B_j)| = b_j$. Além disso, defina $b(G) = \min\{b_j \mid B_j \text{ é um bloco terminal de } G\}$.

Teorema 7.5 (ibid.). *Para qualquer grafo G , vale que:*

$$\text{cont}_{\text{tc}}(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } |V(G)| = 2 \text{ ou } G \text{ é } 2\text{-conexo;} \\ n - b(G) + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Se $|V(G)| = 2$, então o teorema é trivialmente verdadeiro. Se G é 2-conexo, então, pelo Fan Lemma (veja a Proposição 9.5 em (Bondy e Murty 2008)),

para cada par de vértices $u, w \in V, w \neq u$, temos que todo $v \notin \{u, w\}$ está em um caminho de u a w . Portanto, para todo S com $2 \leq |S| \leq n - 1$, S não é convexo. Isso implica que $\text{con}_{\text{tc}}(G) = 1$.

Suponha agora que G não seja 2-conexo. Observe que qualquer $S \subseteq V(G)$ que consiste na união de todos os conjuntos de vértices de todos os blocos de G , exceto um bloco terminal, digamos B_j , é convexo, porque o único vértice de corte z pertencente a $V(B_j)$ separa todos os vértices de $V \setminus V(B_j)$ de $V(B_j) \setminus z$. (Observe que $z \in S$.) Assim o conjunto convexo máximo em G é obtido removendo-se de G todos os vértices em um bloco terminal B_j com tamanho mínimo, exceto o vértice de corte $z \in V(B_j)$. \square

Consideremos agora os problemas de determinar o número de intervalo e o número de envoltória de um grafo G na convexidade de todos os caminhos. Esses parâmetros serão denotados por $\text{in}_{\text{tc}}(G)$ e $\text{hn}_{\text{tc}}(G)$ respectivamente. Seja $eb(G)$ o número de blocos terminais de G .

Teorema 7.6 (Protti e Thompson 2023). *Para qualquer grafo G , vale que:*

$$\text{in}_{\text{tc}}(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } G \text{ é trivial}; \\ 2, & \text{se } |V(G)| = 2 \text{ ou } G \text{ é 2-conexo}; \\ eb(G), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Se $|V(G)| \leq 2$, o teorema é trivialmente verdadeiro. Se G é 2-conexo, pelo Fan Lemma qualquer par $u, w \in V(G), w \neq u$, é tal que o intervalo de $\{u, w\}$ é igual a $V(G)$ e, assim, $\text{in}_{\text{tc}}(G) = 2$ nesse caso.

Finalmente se G não é 2-conexo, considere $S \subseteq V(G)$ tal que $S \cap V(B_j) = \{v_j\}$ para cada bloco terminal B_j de G , em que v_j não é um vértice de corte de G . Observe que $|S| = eb(G)$. A definição de S implica que $T_S = T_G$ e, assim, todo vértice $v \in V(G)$ está em um bloco B_v de G pertencente a um caminho máximo $B_{j_1} z_1 B_{j_2} z_2 \dots z_{k-1} B_{j_k}$ em T_S tal que B_{j_1} e B_{j_k} são blocos terminais de $G_S = G$, contendo respectivamente vértices $u, w \in S, w \neq u$, que não são vértices de corte em $G_S = G$. Pelo Lema 7.1, existe um caminho P em G de u a w passando por v . Em outras palavras, o intervalo de S é igual a $V(G)$. Para concluir a prova, se um conjunto $S' \subseteq V(G)$ é tal que $|S'| < eb(G)$, então existe pelo menos um bloco terminal B_j em G tal que $V(B_j) \setminus \{z_j\}$ não contém vértices de S' , sendo z_j o vértice de corte de G pertencente a $V(B_j)$. Portanto nenhum vértice em $V(B_j) \setminus \{z_j\}$ pode estar em um caminho começando e terminando em vértices distintos de S' , ou seja, o intervalo de S' não é igual a $V(G)$. Assim S é mínimo. \square

Pode-se mostrar que o intervalo de qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$ é tc-conexo, implicando que, na convexidade de todos os caminhos, o intervalo e o fecho convexo de qualquer S coincidem. Logo temos o seguinte corolário:

Corolário 7.4. *Para qualquer grafo G , vale $\text{in}_{\text{tc}}(G) = \text{hn}_{\text{tc}}(G)$.*

Como consequência dos resultados apresentados nesta seção, é fácil verificar que os parâmetros $\text{con}_{\text{tc}}(G)$, $\text{in}_{\text{tc}}(G)$ e $\text{hn}_{\text{tc}}(G)$ podem ser computados em tempo linear no tamanho de G .

7.4 Convexidade de Steiner

Dados um grafo conexo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, seja T um subgrafo conexo de G com número mínimo de arestas que contenha todos os vértices de S . É fácil ver que T é necessariamente uma árvore (Exercício 7.2), chamada de *árvore de Steiner* de S . Encontrar uma árvore de Steiner de um conjunto S é um problema amplamente estudado na literatura, pois generaliza o conceito de caminho mínimo – observe que se $|S| = 2$, então T é precisamente um caminho mínimo entre os vértices de S . Dessa forma, $|T|$ é exatamente o menor número de arestas necessárias para conectar todos os vértices do conjunto S em um subgrafo.

Um conjunto S é dito *St-convexo* se, para qualquer $S' \subseteq S$, os vértices de qualquer árvore de Steiner de S' pertencem a S . A família de todos os conjuntos St-convexos de um grafo G define uma convexidade chamada *convexidade de Steiner* de G , introduzida em Cáceres, Márquez e Puertas (2008).

Dado $S \subseteq V(G)$, o *intervalo de Steiner* $I_{St}(S)$ de S é definido da seguinte maneira:

$$I_{St}(S) = \bigcup_{S' \subseteq S} \{V(T_{S'}) \mid T_{S'} \text{ é uma árvore de Steiner de } S'\}.$$

Em Dourado, Oliveira e Protti (2014), prova-se que, dados um vértice x e um conjunto S , determinar se x pertence a $I_{St}(S)$ é um problema NP-completo.

7.5 Exercícios

Exerc. 7.1. Seja G um grafo conexo. Seja T_G um grafo definido da seguinte forma: cada vértice de T_G está associado a um bloco B_j (uma aresta de corte ou um subgrafo 2-conexo maximal de G) ou a um vértice de corte (articulação) $z_i \in V(G)$. Além disso, existe uma aresta ligando um vértice B_j a um vértice z_i em T_G sempre que o bloco B_j contém o vértice de corte $z_i \in V(G)$. Mostre que T_G é uma árvore.

Exerc. 7.2. Dados um grafo conexo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, mostre que um subgrafo conexo de G com o menor número de arestas que contém todos os vértices de S é uma árvore. Além disso, mostre que toda folha dessa árvore é um vértice de S .



Convexidade em Grafos Orientados

Um *grafo orientado* D é uma orientação de um grafo simples G , ou seja, D é um grafo direcionado obtido de G quando substituímos cada aresta de G por um par ordenado com as mesmas extremidades. Apesar do caso orientado ser pouco estudado na literatura, com relação ao caso não orientado, alguns dos mais antigos artigos sobre Convexidade em Grafos tratam exatamente do caso orientado (Erdős, Fried et al. 1972; Moon 1972). Para o caso orientado, duas convexidades têm sido estudadas na literatura: a geodésica e a P_3 .

Na convexidade geodésica, a função de intervalo correspondente $\vec{\Gamma}_g(u, v)$ retorna todos os vértices de D que pertencem a todos os (u, v) -caminhos ou (v, u) -caminhos direcionados mais curtos (Chartrand, Fink e Zhang 2003; Chartrand e Zhang 2000). Dada a definição da função de intervalo para um grafo orientado, as demais definições e os parâmetros possuem essencialmente a mesma definição que no caso não direcionado.

Note que um conjunto $\vec{\Gamma}_g$ -*fechado* ou *geodesicamente convexo* S em um grafo orientado D é tal que, para qualquer par de vértices $u, v \in S$, todo vértice w que pertença a algum (u, v) -caminho mínimo ou a algum (v, u) -caminho mínimo em D também pertence a S . Quando um subconjunto de vértices S de um grafo orientado D possui $V(D)$ como envoltória, denotado por $\overrightarrow{\text{con}}_g(S) = V(D)$, dizemos que esse conjunto é um *conjunto de envoltória geodésico* de D . O *número de envoltória geodésico* $\text{hn}_g(D)$ de um grafo orientado D na convexidade geodésica é a menor cardinalidade de um conjunto de envoltória geodésico de D . Já o *número de intervalo geodésico* de D , denotado por $\vec{\text{in}}_g(D)$, é a cardinalidade de um menor conjunto S tal que $\vec{\Gamma}_g(S) = V(D)$. Se S é tal

que $\vec{\Gamma}_g(S) = V(D)$, então S é um *conjunto de intervalo geodésico* de D . Deve-se destacar que, no caso particular da convexidade geodésica, assim como ocorre no caso não direcionado, o número de intervalo é também conhecido como *número geodésico* de D .

Apresentamos na Figura 8.1 um exemplo para melhor compreensão de tais parâmetros. Abaixo, note que os vértices u_1, u_2, u_3 são sumidouros e x_1 é fonte e, portanto, eles

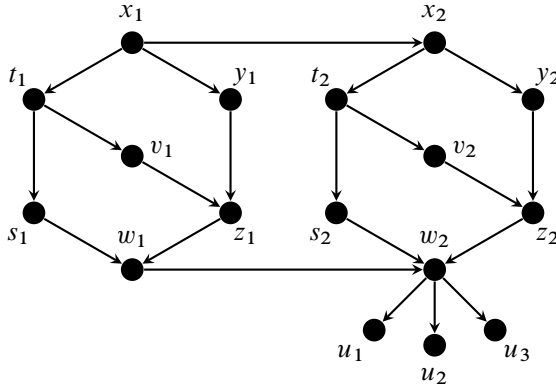


Figura 8.1: Grafo orientado D com $\vec{h}n_g(D) = 4$ e $\vec{i}n_g(D) = 6$.

pertencem a todo conjunto de envoltória e todo conjunto de intervalo na convexidade geodésica de D . Logo $\vec{h}n_g(D) \geq 4$. Os (x_1, u_i) -caminhos mínimos, com $i \in \{1, 2, 3\}$, cobrem quase todos os vértices, com exceção de v_1 e v_2 . Como (t_j, v_j, z_j) é um caminho mínimo para $j \in \{1, 2\}$, temos que $I^2[\{x_1, u_1, u_2, u_3\}] = V(D)$ e, portanto, $\vec{h}n_g(D) = 4$. Note em seguida que os vértices v_j 's devem estar em um conjunto geodésico mínimo. Assim $\{x_1, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$ é um conjunto geodésico mínimo e, conseqüentemente, $\vec{i}n_g(D) = 6$.

Como argumentado previamente, fontes e sumidouros constituem conjuntos coconvexos mínimos na convexidade geodésica de um grafo orientado D . Deve-se ressaltar que não são os únicos. Um vértice $v \in V(D)$ em um grafo orientado D é dito *transitivo* se, para quaisquer $u, w \in V(D)$ tais que $(u, v) \in A(D)$ e $(v, w) \in A(D)$, então $(u, w) \in A(D)$. Note que, portanto, não há (x, y) -caminho mínimo direcionado em D que contenha v , caso $x \neq v$ e $y \neq v$, já que sempre pode-se tomar um *atalho* na vizinhança de v . De certo modo, a noção de vértice transitivo corresponde àquela de vértice simplicial no caso não direcionado. Na literatura sobre convexidade geodésica em grafos orientados, um vértice $v \in V(D)$ em um grafo orientado D é *extremo* se v é fonte, sumidouro ou transitivo.

Analogamente, na convexidade \vec{P}_3 de um grafo orientado D , a função de intervalo correspondente $\vec{\Gamma}_{p_3}(u, v)$ retorna todos os vértices de D que pertencem a (u, v) -caminhos ou (v, u) -caminhos direcionados que possuem exatamente três vértices (Erdős, Fried et

al. 1972). Usamos os termos *conjunto* $\vec{\Gamma}_{P_3}$ -*fechado*, *conjunto* \vec{P}_3 -*convexo*, *conjunto de envoltória* \vec{P}_3 , *número de envoltória* \vec{P}_3 (denotado por $\vec{h}_{P_3}(D)$), *conjunto de intervalo* \vec{P}_3 e *número de intervalo* \vec{P}_3 (denotado por $\vec{i}_{P_3}(D)$.)))

Nesse caso, note que na convexidade \vec{P}_3 um subconjunto de vértices S será convexo se, para cada $v \in V(T) \setminus S$, temos que todos os arcos são direcionados ou de S para v , ou de v para S . Mais ainda, observe que fontes e sumidouros continuam sendo conjuntos coconvexos unitários, porém o mesmo não ocorre para vértices transitivos.

A seguir, apresentamos o estado da arte sobre Convexidade em Grafos Orientados no que diz respeito aos parâmetros número de envoltória e número de intervalo e aos parâmetros relacionados nas convexidades geodésica e P_3 , organizados pelo tipo de contribuição.

Devemos ressaltar que há trabalhos no contexto de grafos orientados sobre o *número de convexidade* na convexidade geodésica (Chartrand, Fink e Zhang 2002) e sobre o *posto* e os números de *Caratheodóry*, *Radon* e *Helly* na convexidade \vec{P}_3 (Parker e Westhoff 2012; Parker, Westhoff e Wolf 2006, 2008, 2009). Esses últimos focam sobretudo no estudo desses parâmetros quando restritos à classe de grafos multipartidos completos.

8.1 A Classe de Torneios

Erdős, Fried et al. (1972) e Moon (1972) estudam propriedades sobre conjuntos convexos na convexidade \vec{P}_3 quando restrito à classe de *torneios*, ou seja, de orientações de grafos completos.

Erdős, Fried et al. (1972) definem um torneio T como *simples* se o conjunto de subconjuntos convexos não triviais de T for vazio. Como no caso de grafos sem orientações, um conjunto convexo $S \subseteq V(D)$ de um grafo orientado D é *trivial* se $|S| = 1$ ou se $S = V(D)$. Eles usam a notação $C(T)$ para representar a família de subconjuntos convexos não triviais de um torneio T .

Teorema 8.1 (ibid.). *Todo torneio T pode ser estendido em um torneio simples T' com dois vértices a mais sempre que $|T| \neq 2$.*

Moon (1972) refina o Teorema 8.1 ao mostrar que, a menos de casos particulares, todo torneio T é subtorneio de um torneio simples T' com apenas um vértice a mais. Erdős, Fried et al. (1972) apresentam também limitantes inferiores e superiores para o número de torneios simples.

Teorema 8.2 (ibid.). *Se T é um torneio finito, então $|C(T)| \leq \binom{|V(T)|}{2} - 1$ com igualdade apenas se T for transitivo.*

Teorema 8.3 (ibid.). *Se α é um cardinal infinito, então existem 2^α torneios simples não isomorfos dois a dois de ordem α .*

Finalmente Erdős, Fried et al. (ibid.) mostram ainda que, para todo torneio T , $C(T)$ satisfaz a propriedade de Bernstein e que a classe de torneios simples não é pseudoelementar.

Ainda sobre torneios, Haglin e Wolf (1996) mostram que $\vec{\text{hn}}_{p_3}(T) \leq 2$, o que implica, como era do interesse dos autores encontrar, na existência de um algoritmo $\mathcal{O}(n^4)$ para determinar *todos* os conjuntos convexos nessa classe.

Esses resultados para torneios, juntamente com os trabalhos supracitados sobre o posto e os números de Caratheodóry, Radon e Helly em orientações de grafos multipartidos completos, constituem a larga maioria dos trabalhos encontrados na literatura sobre a convexidade \vec{P}_3 em grafos orientados. Nas demais seções, apresentamos os outros resultados que são sobretudo para a convexidade geodésica.

8.2 Limites, Propriedades e Resultados Existenciais

Limitantes

É claro que ambos parâmetros $\vec{\text{in}}_g(D)$ e $\vec{\text{hn}}_g(D)$ são iguais a um quando D é um grafo orientado com apenas um vértice. Caso contrário, não há bons limitantes em geral:

Proposição 8.1 (Chartrand, Fink e Zhang 2003; Chartrand e Zhang 2000). *Se D é um grafo orientado não trivial, então:*

$$2 \leq \vec{\text{hn}}_g(D) \leq \vec{\text{in}}_g(D) \leq n.$$

Mais ainda, esses limitantes podem ser atingidos pelos dois parâmetros.

Demonstração. Vide Exercício 8.1. \square

Também há na literatura limitantes superiores com respeito ao diâmetro do grafo orientado D .

Proposição 8.2 (Chartrand, Fink e Zhang 2003; Chartrand e Zhang 2000). *Se D é um grafo orientado não trivial, então*

$$\vec{\text{hn}}_g(D) \leq \vec{\text{in}}_g(D) \leq n(D) - \text{diam}(D) + 1.$$

Esses limitantes são apertados.

Demonstração. Vide Exercício 8.2. \square

Caracterizações

Na seção anterior, apresentamos limitantes inferior e superior para os dois parâmetros. Há também resultados na literatura caracterizando a classe de grafos que atingem tais limitantes. Para o limitante superior, encontramos caracterizações para os grafos orientados D tais que $\vec{h}n_g(D) = n$ e $\vec{i}n_g(D) = n$. Um grafo orientado D é *transitivo* quando $(u, w) \in A(D)$ sempre que houver $v \in V(D)$ tal que $(u, v), (v, w) \in A(D)$.

Proposição 8.3 (Chartrand, Fink e Zhang 2003; Chartrand e Zhang 2000). *Seja D um grafo orientado não trivial, então:*

1. $\vec{h}n_g(D) = n(D)$ se, e somente se, D é transitivo;
2. $\vec{i}n_g(D) = n(D)$ se, e somente se, D é transitivo.

Demonstração. Se D for transitivo, cada vértice $v \in V(D)$, que satisfaça $d_D^+(v) > 0$ e $d_D^-(v) > 0$, deve necessariamente ser um vértice transitivo. Todos os demais vértices de D são fontes ou sumidouros. Logo todos os vértices de D são extremos e, portanto, $\vec{h}n_g(D) = \vec{i}n_g(D) = n$. Para a outra implicação, considere a contrapositiva da mesma. Se D não for transitivo, existem vértices $u, v, w \in V(D)$ tais que $(u, v), (v, w) \in A(D)$ e $(u, w) \notin A(D)$. Nesse caso, $\vec{T}_g[\{u, w\}]$ possui o vértice v e, desse modo, $V(D) \setminus \{v\}$ é um conjunto de envoltória e geodésico de D . Consequentemente $\vec{h}n_g(D) \leq n(D) - 1$ e $\vec{i}n_g(D) \leq n(D) - 1$. \square

Para o limitante inferior, infelizmente não encontramos uma caracterização como aquelas acima. Há ao menos o seguinte resultado relacionado, apresentado por Chartrand e Zhang (2000).

Proposição 8.4 (ibid.). *Seja D um grafo orientado tal que $n(D) \geq 3$. Então todo par de vértices de D é um conjunto de intervalo na convexidade geodésica de D se, e somente se, D é um ciclo direcionado.*

Resultados Existenciais

Nesta subseção, apresentaremos resultados sobre a existência de grafos orientados que obedecem a certas características. Por exemplo:

Proposição 8.5 (Chartrand, Fink e Zhang 2003). *Para quaisquer dois inteiros k e n com $2 \leq k \leq n$, existe uma orientação de P_n com ordem n e número de envoltória k .*

Demonstração. Vide Exercício 8.3. \square

Uma mesma demonstração da Proposição 8.5 também pode ser usada para o resultado análogo com o parâmetro $\vec{i}n_g$.

Proposição 8.6 (Chartrand e Zhang 2000). *Para quaisquer dois inteiros k e n com $2 \leq k \leq n$, existe uma orientação de P_n com ordem n e número geodésico k .*

Demonstração. Vide Exercício 8.3. \square

Ainda mais, Chartrand e Zhang (ibid.) mostram que, na proposição acima, podemos nos restringir a torneios.

Proposição 8.7 (ibid.). *Para quaisquer dois inteiros k e n com $2 \leq k \leq n$, existe um torneio de ordem n e número geodésico k .*

O próximo resultado, por um lado, parece mais geral do que os anteriores. Ele afirma a existência de um grafo orientado D com $\overrightarrow{hn}_g(D) = a$ e $\overrightarrow{in}_g(D) = b$ para cada par de inteiros $2 \leq a \leq b$. A diferença é que, ao contrário das Proposições 8.5 e 8.6, o grafo mostrado a seguir possui o número de vértices determinado por a e b .

Proposição 8.8 (Chartrand, Fink e Zhang 2003). *Para cada par de inteiros a, b com $2 \leq a \leq b$, existe um grafo orientado conexo D tal que $\overrightarrow{hn}_g(D) = a$ e $\overrightarrow{in}_g(D) = b$.*

O próximo resultado é uma generalização da Proposição 8.5, uma vez que P_n possui exatamente $n - 1$ arestas.

Teorema 8.4 (ibid.). *Para cada par de inteiros n, m com $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, existe um grafo G de ordem n e tamanho m tal que, para cada inteiro k com $2 \leq k \leq n$, existe uma orientação D de G tal que $\overrightarrow{hn}_g(D) = k$.*

Chartrand e Zhang (2000) propõem uma pergunta similar ao enunciado do Teorema 8.4 para o número de intervalo geodésico. Tal questão foi respondida por Chang, Tong e Wang (2004).

Teorema 8.5 (ibid.). *Para quaisquer dois inteiros n, m com $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, existe um grafo G com ordem n , tamanho m e $\overrightarrow{in}_g(D) = k$, para cada $k \in \{2, \dots, n\}$.*

Também foi demonstrado que:

Proposição 8.9 (Chartrand e Zhang 2000). *Para todo inteiro k , existe um grafo orientado D e um arco $a \in A(D)$ tais que a inversão do sentido de a , produzindo o grafo orientado D' , resulta em $\overrightarrow{in}_g(D') = \overrightarrow{in}_g(D) + k$.*

8.3 Espectro Geodésico

Dado um grafo G , o *espectro geodésico* de G , denotado por $S_g(G)$, é o conjunto de valores do número de intervalo geodésico entre todas as orientações de G . Ou seja, $S_g(G) =$

$\{\vec{\text{in}}_g(D) \mid D \text{ orientação de } G\}$. De forma análoga, o *espectro de envoltória* de um grafo G , denotado por $S_h(G)$, é definido com respeito aos números de envoltória geodésicos de orientações D de G . O espectro será dito *contínuo* se corresponder ao conjunto $\{2, \dots, n\}$. Pelos Teoremas 8.4 e 8.5, existem grafos com espectro de envoltória e geodésico contínuos para cada tripla n, m, k , satisfazendo as devidas condições.

Pelas Proposições 8.5 e 8.6, deduz-se o seguinte.

Corolário 8.1. *Para $n \geq 2$, $S_h(P_n) = S_g(P_n) = \{2, \dots, n\}$.*

Até agora, perceba que mostramos apenas grafos com espectro geodésico e de envoltória contínuos. Porém nem sempre é o caso, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 8.6 (Chang, Tong e Wang 2004). *Para todo $n \geq 3$,*

$$S_g(C_n) = \{3\} \cup \left\{ 2s \mid 1 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Demonstração. Vide Exercício 8.4. \square

A versão para o espectro de envoltória é um corolário do seguinte resultado, e o argumento é análogo ao anterior.

Proposição 8.10 (Chartrand, Fink e Zhang 2003). *Seja D uma orientação de C_n . Então $\vec{\text{hn}}(D) = 3$ ou $\vec{\text{hn}}(D) = 2t$ para algum inteiro t com $1 \leq t \leq n/2$.*

Corolário 8.2. *Para $n \geq 3$, $S_h(C_n) = \{3\} \cup \{2s \mid 1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.*

O próximo resultado é sobre o espectro geodésico das árvores. Perceba que, como as folhas de uma árvore T possuem apenas um vizinho, numa orientação de T , cada folha será uma fonte ou um sumidouro. Assim, sendo ℓ o número de folhas de T , segue que $\vec{\text{in}}_g(D) \geq \ell$ para toda orientação D de T .

Teorema 8.7 (Chang, Tong e Wang 2004). *Se T é uma árvore com ℓ folhas, $S_g(T) = \{\ell, \ell + 1, \dots, n\}$.*

Pela Proposição 8.7, podemos deduzir que $S_g(K_n) = \{2, \dots, n\}$. O teorema abaixo generaliza esse resultado para grafos r -partidos com grau mínimo pelo menos dois.

Teorema 8.8 (ibid.). *Se $G = K_{n_1, \dots, n_r}$ é um grafo r -partido completo de ordem n e tal que $\delta(G) \geq 2$, então $S_g(G) = \{2, \dots, n\}$.*

8.4 Máximos e Mínimos em todas as orientações

A maior parte da literatura sobre convexidade geodésica em grafos orientados trata dos parâmetros definidos a seguir. Seja G um grafo não direcionado. O *número de envoltória*

orientável superior e o *número de envoltória orientável inferior* são definidos respectivamente por

$$\text{hn}^+(G) = \max\{\overrightarrow{\text{hn}}_g(D) \mid D \text{ orientação de } G\};$$

$$\text{hn}^-(G) = \min\{\overrightarrow{\text{hn}}_g(D) \mid D \text{ orientação de } G\}.$$

Basicamente esses são respectivamente o maior e o menor valor dentre os elementos de $S_h(G)$. Perceba que, como estamos tratando com grafos finitos, ambos os números estão bem definidos. O *número de intervalo geodésico orientável superior* e o *número de intervalo geodésico orientável inferior* são definidos de maneira análoga por

$$\text{gn}^+(G) = \max\{\overrightarrow{\text{in}}_g(D) \mid D \text{ orientação de } G\};$$

$$\text{gn}^-(G) = \min\{\overrightarrow{\text{in}}_g(D) \mid D \text{ orientação de } G\}.$$

Pelo limitante inferior da Proposição 8.1, temos que $\text{hn}^-(G) \geq 2$ e $\text{gn}^-(G) \geq 2$. Assim uma pergunta natural é quais grafos atingem esse limitante. Apesar de não haver caracterizações, há condições suficientes na literatura. Vide Exercício 8.5.

Proposição 8.11 (Chartrand, Fink e Zhang 2003). *Seja G um grafo conexo não trivial. Se G possui um caminho Hamiltoniano, então $\text{hn}^-(G) = 2$.*

Proposição 8.12 (Chartrand e Zhang 2000). *Seja G um grafo conexo não trivial. Se G possui um caminho Hamiltoniano, então $\text{gn}^-(G) = 2$.*

Há também limitante superior para $\text{hn}^-(G)$ apresentado na literatura. Dado um grafo G , uma *árvore geradora* de G é uma árvore $T \subseteq G$ tal que $V(T) = V(G)$.

Lema 8.1 (Chartrand, Fink e Zhang 2003). *Seja μ o menor número de folhas em uma árvore geradora do grafo conexo G , então $\text{hn}^-(G) \leq \mu$.*

Perceba que esse resultado também vale para o número de intervalo geodésico orientável inferior.

Teorema 8.9 (Dong, Lu e Wang 2009). *Dado um grafo G qualquer, $\text{gn}^-(G) \leq \min\{\ell(T) \mid T \text{ é uma árvore geradora de } G\}$ em que $\ell(T)$ é o número de folhas de T .*

Com respeito ao limitante superior, já era conhecido o seguinte resultado na literatura.

Proposição 8.13 (Chartrand, Fink e Zhang 2003). *Seja G um grafo conexo não trivial. Então, $\text{hn}^+(G) = n$ se, e somente se, G possui uma orientação transitiva se, e somente se, $\text{gn}^+(G) = n$.*

Em Chartrand e Zhang (2000), também foi mostrado que os grafos bipartidos de ordem pelo menos dois atingem esse valor para o número geodésico orientável superior.

Lembre que $\vec{hn}_g(D) \leq \vec{in}_g(D)$ para todo grafo orientado D . Logo é fácil observar que $hn^-(G) \leq gn^-(G)$, assim como $hn^+(G) \leq gn^+(G)$ para todo grafo G . Também observe que $hn^-(G) \leq hn^+(G)$ para todo grafo G e que $gn^-(G) \leq gn^+(G)$.

Caso valha a igualdade, isso implicaria que os valores do número de envoltória (geodésico) de todas as possíveis orientações de um grafo são os mesmos. À primeira vista parece estranho que se tomarmos um grafo de ordem e tamanho grandes, todas as suas orientações tenham o mesmo número de envoltória ou o mesmo número geodésico. De fato, ambas as desigualdades são estritas.

Teorema 8.10 (Farrugia 2005). *Para todo grafo conexo G com pelo menos três vértices, temos que $hn^-(G) < hn^+(G)$ e $gn^-(G) < gn^+(G)$.*

Com isso, temos que $hn^-(G) < hn^+(G) \leq gn^+(G)$ e $hn^-(G) \leq gn^-(G) < gn^+(G)$. Assim resta apenas estabelecer uma relação entre $gn^-(G)$ e $hn^+(G)$, respondida pelo seguinte resultado.

Teorema 8.11 (Hung, Tong e Wang 2009). *Para todo grafo conexo G com pelo menos três vértices, temos que $gn^-(G) < hn^+(G)$.*

Desse modo, podemos dizer que para todo grafo conexo de ordem pelo menos três,

$$hn^-(G) \leq gn^-(G) < hn^+(G) \leq gn^+(G).$$

8.5 Complexidade

O estudo da Complexidade Computacional para se determinar os parâmetros número de envoltória e número de intervalo foi somente o foco principal de apenas um trabalho recente na literatura. Nele os autores estudam exclusivamente o caso da convexidade geodésica.

Teorema 8.12 (Araújo e Arraes 2022). *Dados um grafo orientado D e um inteiro positivo k , decidir se $\vec{hn}_g(D) \leq k$ é NP-completo, mesmo se D é um cubo parcial orientado.*

A ideia geral da demonstração do Teorema 8.12 é simples, mas segue de duas observações não necessariamente triviais: ao trocar cada aresta $uv \in E(G)$ de um grafo bipartido não orientado G por um C_4 direcionado, em que u e v são vértices não consecutivos do C_4 , produz um grafo orientado D tal que $\vec{hn}_g(D) = hn_g(G)$; e se G é cubo parcial, então a mesma operação de troca de cada aresta por um C_4 produz um cubo parcial. Logo o resultado segue já que determinar se $hn_g(G) \leq k$, dados um grafo não orientado G e um inteiro positivo k , é um problema NP-completo, mesmo que G seja um cubo parcial (Albenque e Knauer 2016). Deve-se ressaltar que a classe de cubos parciais é uma subclasse de bipartidos.

Araújo e Arraes (2022) mostram ainda que a determinação do número de intervalo geodésico de um grafo orientado D é um problema computacionalmente difícil. A redução é feita a partir do problema de Cobertura por Conjuntos.

COBERTURA POR CONJUNTOS

Entrada: Conjunto U , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ onde $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = U$ e $k \in \mathbb{Z}_+^*$.
 Parâmetro: k .
 Pergunta: Existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F = U$ e $|\mathcal{F}'| \leq k$?

A COBERTURA POR CONJUNTOS é um dos 21 problemas NP-completos de Karp (1972), não admite algoritmo $\mathcal{O}(\log n)$ -aproximativo, a menos que $P = NP$ (Lund e Yannakakis 1994), sendo também $W[2]$ -difícil quando parametrizado por k (Downey e Fellows 2012).

Teorema 8.13 (Araújo e Arraes 2022). *Decidir se $\vec{\text{in}}_g(D) \leq k$ é NP-completo, não admite $\mathcal{O}(\log n)$ -aproximação e é $W[2]$ -difícil quando parametrizado por k , mesmo que D seja uma orientação acíclica de um grafo bipartido, cobipartido ou split.*

Demonstração. Apresentamos a seguir a redução para grafos bipartidos. Os outros dois casos seguem de pequenas modificações dessa redução e são deixadas como exercício (vide Exercício 8.6).

Primeiro deve-se notar que pode-se calcular em tempo polinomial $\vec{\text{I}}_g(S)$, para uma dada solução candidata S em um grafo orientado D , assim como no caso não direcionado como apresentado em Dourado, Gimbel et al. (2009). Logo o problema pertence a NP.

Dada uma instância $I = (U, \mathcal{F}, k)$ do COBERTURA POR CONJUNTOS, vamos construir um grafo orientado bipartido $D(I)$ com bipartição $\{A, B\}$ de $V(D)$ em conjuntos independentes, de modo que I é uma instância SIM para COBERTURA POR CONJUNTOS se, e somente se, $\vec{\text{in}}_g(D(I)) \leq k + 3$. Assuma, sem perda de generalidade, que $U = \{1, \dots, n\}$ e que $|\mathcal{F}| = m$.

Para cada $F_i \in \mathcal{F}$, adiciona-se um vértice f_i correspondente em A . Para cada $j \in U$, adiciona-se um vértice u_j em B . Sempre que $j \in F_i$, adiciona-se o arco (f_i, u_j) a $A(D(I))$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

Adicionam-se ainda três vértices u, v e w e os arcos (u, f_i) , (f_i, w) , para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, (u_j, v) para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e por último (u, v) . Adiciona-se v ao conjunto A e u, w a B Veja Figura 8.2 para um exemplo da construção de $D(I)$.

Por construção, note que $D(I)$ é um grafo orientado acíclico cujo grafo subjacente é bipartido, com bipartição $\{A, B\}$. Além disso, note que $|V(D)| = n + m + 3$ e, portanto, a construção pode ser feita em tempo linear, e o valor da solução, $k + 3$, depende exclusivamente do parâmetro k do problema de COBERTURA POR CONJUNTOS. Logo, uma vez demonstrada a equivalência das instâncias, a NP-completude, $\mathcal{O}(\log n)$ -inaproximabilidade e $W[2]$ -difícilidade de COBERTURA POR CONJUNTOS serão herdadas para o problema de decidir se $\vec{\text{in}}_g(D) \leq p$, dados uma orientação acíclica de um grafo bipartido D e um inteiro positivo p .

Note que u é uma fonte e v, w são sumidouros. Portanto são vértices extremos e devem pertencer a todo conjunto de intervalo na convexidade geodésica de $D(I)$. Além disso, $(u, w) \notin A(D(I))$ e, então, (u, f_i, w) é um (u, w) -caminho mais curto em $D(I)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

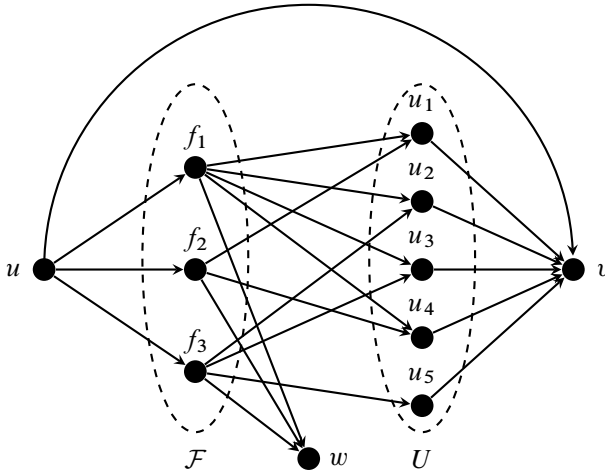


Figura 8.2: Grafo orientado $D(I)$, assumindo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{F} = \{F_1 = \{1, 2, 3, 4\}, F_2 = \{1, 4\}, F_3 = \{2, 3, 5\}\}$

Seja $\mathcal{F}' = \{F_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$ para algum $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tal que $\bigcup_{i \in I} F_i = U$ e $|I| \leq k$. Tome $S = \{f_i \mid i \in I\} \cup \{u, v, w\}$. Como $|I| \leq k$, note que $|S| \leq k + 3$. Como \mathcal{F}' é uma cobertura para U , para cada $j \in U$, existe $F_i \in \mathcal{F}$ tal que $(f_i, u_j) \in A(D)$, obtém-se um (f_i, v) -caminho mais curto (f_i, u_j, v) . Portanto S é um conjunto de intervalo geodésico de $D(I)$.

Por outro lado, seja S um conjunto de intervalo geodésico de $D(I)$ com no máximo $k + 3$ vértices. Como argumentado previamente, temos que $u, v, w \in S$. Caso exista $u_j \in S$, observe que podemos substituir u_j por um vértice f_i tal que $(f_i, u_j) \in A(D)$. Assim obtemos outro conjunto de intervalo geodésico S' tal que $|S'| \leq k + 3$. Desse modo, sem perda de generalidade, assumimos que $S \setminus \{u, v, w\} \subseteq \{f_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$. Seja $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i \in S\}$. Note que a família $\mathcal{F}' = \{F_i \in \mathcal{F} \mid i \in I\}$ satisfaz $\bigcup_{F_i \in \mathcal{F}'} F_i = U$ e $|\mathcal{F}'| \leq k$. \square

Como resultado positivo, Araújo e Arraes (2022) apresentam algoritmos polinomiais para determinar $\overrightarrow{\text{hn}}_g(D)$ e $\overrightarrow{\text{in}}_g(D)$ quando D é a orientação de um cacto, sendo grafos em que cada bloco é um ciclo ou uma aresta. Note que cactos são uma subclasse de grafos bipartidos.

Deve-se ressaltar que, como mencionado na Seção 8.1, Haglin e Wolf (1996) mostram que $\overrightarrow{\text{hn}}_{p3}(T) \leq 2$ para um torneio T , o que implica não somente que todos os seus conjuntos convexos podem ser obtidos em $\mathcal{O}(n^4)$, mas o próprio valor de $\text{hn}(T)$ pode ser decidido em tempo constante, uma vez que será igual a 1 se, e somente se, o torneio for trivial, se não será 2.

Para finalizarmos, deve-se registrar que há um manuscrito recente, ainda não devidamente revisado por pares, que traz mais contribuições sobre o número de envoltória e o número de intervalo de grafos orientados, não somente nas convexidades geodésica e \overrightarrow{P}_3 , mas também no que seria o equivalente à convexidade p_3^* . A função de intervalo $\overrightarrow{I}_{p_3^*}(u, v)$, na convexidade \overrightarrow{P}_3^* de um grafo orientado D , retorna, além de u e v , todos os vértices $w \in V(D)$ tais que existem arcos $(u, w), (w, v) \in A(D)$, mas apenas se $(u, v) \notin A(D)$ (Araújo, Maia et al. 2023). Ou seja, tal função de intervalo retorna apenas vértices em (u, v) -caminhos *mínimos* de comprimento dois em D .

8.6 Exercícios

Exerc. 8.1. Demonstre a Proposição 8.1.

Exerc. 8.2. Demonstre a Proposição 8.2.

Exerc. 8.3. Demonstre as Proposições 8.5 e 8.6.

Exerc. 8.4. Demonstre o Teorema 8.6.

Exerc. 8.5. Demonstre as Proposições 8.11 e 8.12.

Exerc. 8.6. Complemente a demonstração do Teorema 8.13 para o caso de grafos split e cobipartidos.

9

Aplicações de Convexidade em Grafos

9.1 Modelos de Difusão em Grafos

Como visto na Seção 2.4, Chen (2009) define um *modelo TSS* (*Target Set Selection*) como um grafo G e uma função limiar $\tau : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Vamos assumir que $\tau(v) > 0$ para todo vértice v ; vimos no Lema 2.5 que toda função limiar desse tipo induz uma convexidade em grafos, chamada *convexidade TSS*. Funções limiares são usadas para modelar processos de difusão em grafos, propagação de influência em redes sociais, contaminação de doenças entre outros.

O processo de difusão é o seguinte: inicialmente os vértices de um conjunto S_0 dado estão *ativos*, os demais vértices estão *inativos*, e vértices ativos permanecem sempre ativos. Em cada passo, um vértice inativo v se torna ativo se possui pelo menos $\tau(v)$ vizinhos ativos. O processo é síncrono: todos os vértices inativos atualizam seu status ativo/inativo ao mesmo tempo em cada passo do processo. Dizemos que S_t é o conjunto de vértices ativos no tempo t e que o *tempo de iteração* $t_i(S_0)$ é o menor valor t tal que $S_t = S_{t+1}$.

Processos como esse tem sido pesquisados sob nomes diferentes: *percolação bootstrap* em Chalupa, Leath e Reich (1979), *monopólio dinâmico* em Peleg (1998), *maximização da influência* em Kempe, Kleinberg e Tardos (2003), *seleção de conjunto alvo* (*target set selection*) em Chen (2009) e *conversão irreversível* em Centeno, Dourado, Penso et al. (2011). Um conjunto S_0 que consegue ativar todo vértice de G ao final do processo de difusão é chamado de *conjunto alvo* (*target set*) em Chen (2009), sendo basicamente um *conjunto de envoltória* na convexidade correspondente.

Historicamente essa linha de pesquisa se concentrou em *majority thresholds* (Peleg 1998), a função limiar da maioria $\tau(v) = \lceil d(v)/2 \rceil$, em que $d(v)$ é o grau de v , e também na função limiar com valor constante r , chamada *r-neighbor bootstrap percolation* (Chalupa, Leath e Reich 1979). Além disso, concentrou-se em resultados probabilísticos, quando os limiares são escolhidos aleatoriamente dentro de uma certa faixa dada (Kempe, Kleinberg e Tardos 2003) ou quando o conjunto S_0 inicial é escolhido aleatoriamente (Holroyd 2003). Como já foi dito, a definição mais geral com limiares quaisquer foi dada por Chen (2009) no contexto de *Target Set Selection* (TSS).

O problema mais investigado nessa área é o problema TSS-SIZE: determinar o tamanho do menor conjunto alvo, isto é, calcular o número de envoltória $hn(G)$ na convexidade correspondente. Ver, por exemplo, Bazgan et al. (2014), Ben-Zwi et al. (2011), Chopin et al. (2014), Ehard e Rautenbach (2019) e Nichterlein et al. (2013).

Além do TSS-SIZE, outros problemas foram investigados recentemente, como TSS-TIME, TSS-MAX-CONVEX e TSS-DOMINATION, que consistem basicamente em computar os parâmetros tempo de percolação $tp(G)$, número de convexidade $con(G)$ e número de intervalo $in(G)$ do grafo na convexidade correspondente.

O problema TSS-TIME foi estudado primeiramente por Flocchini et al. (2003). Foi estudado com limiares constantes $\tau(v) = 2$ por Marcilon e Sampaio (2018b) e com limiares quaisquer por Keiler et al. (2023), que também obtiveram um algoritmo polinomial para árvores e provaram a NP-completude mesmo para grafos bipartidos. Uma motivação para esse problema é determinar o maior tempo a se esperar para que a rede inteira fique ativa.

O problema TSS-MAX-CONVEX foi estudado primeiro por Araújo e Sampaio (2023), que também provaram que é Poly-APX-completo mesmo em grafos split e em grafos bipartidos e obtiveram algoritmos lineares para cografos e grafos distância hereditária, quando o limiar máximo é uma constante. Uma motivação para esse problema é que ele é uma medida natural para o tamanho de *comunidades fechadas*, que se mantém inativas mesmo se todos os demais vértices forem ativados.

O problema TSS-DOMINATION foi investigado sob diferentes nomes: VECTOR DOMINATION por Cicalese, Milanić e Vaccaro (2013), $(1, |V(G)|)$ -TARGET SET SELECTION por Cicalese, Cordasco et al. (2014) e MIN-TBIDS por Eirinaki, Moniz e Potika (2016). Algoritmos polinomiais foram obtidos para árvores e cografos por Cicalese, Milanić e Vaccaro (2013), grafos com *treewidth* limitada por Cicalese, Cordasco et al. (2014) e grafos split-in-diferentes por Mafort e Protti (2020). Uma motivação para esse problema é determinar o tamanho do menor conjunto para ativar a rede inteira rapidamente (em 1 passo de tempo).

Para ilustrar alguns resultados, mostramos como resolver em tempo polinomial para árvores os problemas TSS-SIZE e TSS-TIME, cujos objetivos são encontrar conjuntos alvo com menor tamanho e maior tempo de percolação, respectivamente. Vértices com $\tau(v) > d(v)$ devem estar em qualquer conjunto alvo e, assim, podemos simular o processo de difusão a partir desses vértices até parar. Por isso, para simplificar, assumimos que $0 < \tau(v) \leq d(v)$ para todo vértice v .

TSS-SIZE em árvores é resolvido pelo algoritmo abaixo de Chen (2009). A Figura 9.1 mostra um exemplo da execução desse algoritmo. Os números dentro dos vértices representam a ordem em que os vértices foram selecionados pelo algoritmo para se decidir seu

status dentro/fora do conjunto alvo. Note que o tempo de percolação desse conjunto alvo é 5, muito inferior ao máximo 15 da Figura 9.2.

- Algoritmo TSS-SIZE-TREE (árvore T , função limiar τ)

```

0  considere  $T$  como árvore enraizada em um vértice  $r$  de grau  $d(r) \geq 2$ 
1  seja  $\tau'(v) = \tau(v)$  para todo vértice  $v$  de  $T$ 
2  seja  $x(f) = 0$  para toda folha  $f$  de  $T$ 
3  enquanto há vértice  $v$  com  $x(v)$  não definido, faça
4     seja  $u$  um vértice cujos filhos têm  $x(\cdot)$  definido e seja  $w$  o pai de  $u$ 
5     se  $\tau'(u) \geq 2$ , então
6          $x(u) \leftarrow 1$ ;       $\tau'(w) \leftarrow \tau'(w) - 1$ 
7     senão
8          $x(u) \leftarrow 0$ 
9     se  $\tau'(u) \leq 0$ , então:  $\tau'(w) \leftarrow \tau'(w) - 1$ 
10 retorne os vértices  $v$  com  $x(v) = 1$ 

```

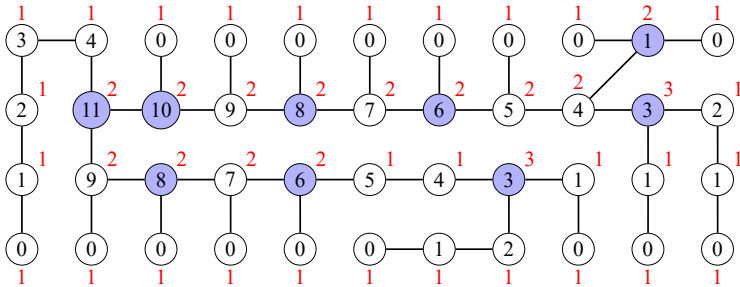


Figura 9.1: Árvore com conjunto alvo mínimo em cinza: 9 vértices. Limiares como números fora dos vértices. O número nos vértices é a ordem em que se decidiu o status cinza/branco do vértice. No algoritmo, tomou-se a raiz no vértice 11.

TSS-TIME em árvores é resolvido por Keiler et al. (2023): o tempo máximo de percolação está associado ao maior caminho na árvore cujos vértices internos são *não saturados*, sendo um vértice *saturado* se o limiar é maior ou igual ao grau. A Figura 9.2 mostra um exemplo para a mesma árvore da Figura 9.1, com caminho de não saturados indicado com números de 1 a 14, em que os números dentro dos vértices representam o tempo em que o vértice foi ativado pelo conjunto alvo, representado pelos vértices com tempo 0. Note que o tempo máximo 15 é obtido por um conjunto alvo com 29 vértices, muito acima do mínimo 9 da Figura 9.1.

Como questões em aberto, temos os problemas relacionados à computação dos outros parâmetros de convexidade relacionados aos Modelos TSS como, por exemplo, TSS-CARATHÉODORY, TSS-RADON, TSS-HELLY e TSS-RANK.

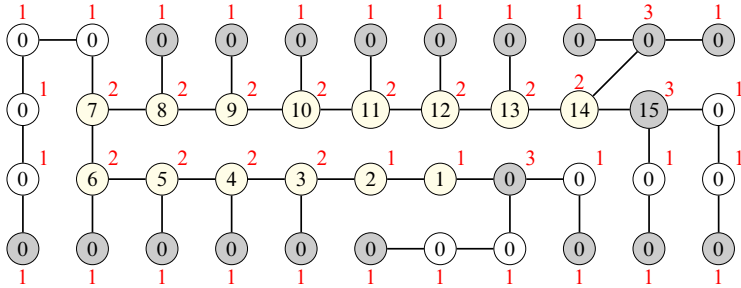


Figura 9.2: Árvore com tempo de percolação 15. Números nos vértices são tempos de ativação. Tempo 0 representa o conjunto alvo, que contém 29 vértices. Limiares como números fora dos vértices, vértices saturados em cinza e caminho máximo de não saturados indicados com tempos de 1 a 14.

9.2 Jogos de Convexidade em Grafos

Jogos do Intervalo Geodésico

Como dito no início do livro, o primeiro artigo de convexidade em grafos gerais publicado em inglês é o artigo “Convexity in graphs”, de Harary e Nieminem (1981). Três anos depois, Harary (1984) propôs os primeiros jogos de convexidade em grafos no resumo “Convexity in Graphs: Achievement and Avoidance Games”. Abaixo descrevemos o jogo mais antigo: o *jogo do intervalo geodésico* (*geodesic game*) estudado por Buckley e Harary (1985b). Nesse jogo, temos dois jogadores, Alice e Bob, que selecionam alternadamente vértices ainda não selecionados, começando por Alice. Seja S o conjunto dos vértices selecionados durante o jogo, inicialmente vazio. Cada jogador adiciona a S um (e apenas um) vértice $v \notin S$. Os jogos terminam quando $I_g(S) = V(G)$.

Esse jogo possui duas variantes: o *jogo normal* (o último a jogar ganha) e o *jogo pobre*¹ (o último a jogar perde). Em inglês, as variantes normal e pobre também são chamadas de *achievement and avoidance game* respectivamente. Do clássico Teorema de Zermelo (1913), um dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora em cada um desses jogos, pois são jogos finitos sem empate e com informação perfeita. Com isso, o objetivo de cada um dos jogos é decidir se Alice possui ou não uma estratégia vencedora. Para ilustrar, temos o lema simples a seguir, cuja prova é deixada como exercício.

Lema 9.1 (Buckley e Harary 1985b). *Considere o jogo do intervalo geodésico sobre o ciclo C_n . Alice vence a variante normal se e só se n é ímpar e vence a variante pobre se e só se $n \pmod 4$ é 1 ou 2.*

¹Achamos que a melhor tradução de *misère game*, que poderia ser jogo de miséria ou de pobreza, é *jogo pobre*, pois intencionalmente se joga com o *objetivo de perder* como, por exemplo, um jogador de damas tentando forçar o oponente a tomar todas as suas pedras.

Demonstração. Exercício 9.5. \square

Alguns resultados de Buckley e Harary (1985b) foram melhorados por Nečásková (1988) e, anos mais tarde, Haynes, Henning e Tiller (2003) obtiveram resultados para árvores e grafos multipartidos completos no jogo do intervalo geodésico. Buckley e Harary (1985a) também definem em outro artigo o *jogo fechado do intervalo geodésico*, cuja única diferença é a impossibilidade de seleção de vértices de $I_g(S)$, o intervalo dos vértices já selecionados.

Considerando cada jogo como o problema de decidir se Alice possui uma estratégia vencedora, não é difícil mostrar que esses jogos são da classe PSPACE. No entanto, até hoje não se sabe se esses jogos são PSPACE-completos, ao contrário dos jogos da posição geral, dos jogos da posição convexa e dos jogos da envoltória na convexidade geodésica definidos nas próximas subseções.

Jogos da Posição Geral Geodésica

Nos jogos do intervalo, o conjunto final S dos vértices selecionados é um conjunto de intervalo ($I_g(S) = V(G)$), mas pode não ser minimal, ou seja, S pode conter um subconjunto próprio que também é de intervalo. Por exemplo, no caminho $P_n v_1 v_2 \dots v_n$, uma possível (embora improvável) sequência de escolhas seria v_1, \dots, v_n com Alice (resp. Bob) selecionando os vértices v_i com i ímpar (resp. par). Nesse exemplo, todos os vértices poderiam ser selecionados, embora só exista um conjunto de intervalo minimal $S = \{v_1, v_n\}$, que também é mínimo.

Para evitar essa situação, Klavžar, Neethu P. K. e Chandran S. V. (2022) introduziram recentemente o *jogo da posição geral geodésica* (*geodesic general position game*), com suas duas variantes normal e pobre. Nesse jogo, o conjunto S dos vértices selecionados deve estar sempre em posição geral geodésica, ou seja, não pode haver um vértice $v \in S$ tal que $v \in I_g(S \setminus \{v\})$. Com isso, o jogo termina quando não é possível mais escolher vértices e, portanto, no final S não necessariamente será um conjunto de intervalo como nos outros jogos. É fácil confundir esse jogo com o jogo do intervalo fechado geodésico, mas são bem diferentes. No mesmo exemplo do caminho $P_n v_1 v_2 \dots v_n$ para $n \geq 3$, Alice escolhe um vértice qualquer v_i , Bob escolhe um vértice v_j e depois Alice não consegue escolher o terceiro vértice de S , perdendo o jogo normal e vencendo o jogo pobre da posição geral.

O lema abaixo resolve o jogo normal em grafos bipartidos. O problema do jogo pobre da posição geral em grafos bipartidos permanece em aberto.

Lema 9.2. *Dado um grafo G bipartido, Alice vence o jogo normal da posição geral geodésica se e só se o número de vértices isolados de G é ímpar.*

Demonstração. Exercício 9.6 (Dica: Lema 3.4). \square

Com relação à complexidade computacional, Chandran S. V. et al. (2023) provaram que o jogo normal e o jogo pobre da posição geral geodésica são PSPACE-completos.

Para exemplificar uma prova de PSPACE-completude, mostramos abaixo a demonstração mais simples.

Teorema 9.1 (ibid.). *O jogo normal da posição geral geodésica é PSPACE-completo em grafos com diâmetro 4.*

Demonstração. Vamos obter uma redução do jogo de formação de cliques², provado PSPACE-completo por Schaefer (1978). Nesse jogo, dado um grafo G , jogadores 1 e 2 alternadamente selecionam vértices e o conjunto dos vértices escolhidos deve ser uma clique. O primeiro incapaz de jogar perde o jogo. Esse jogo está fortemente relacionado ao clássico jogo *Node Kayles*³, no qual se quer obter um conjunto independente ao invés de uma clique. O jogo de formação de clique é o jogo *Node Kayles* jogado no complemento do grafo e vice-versa.

Não é difícil provar que o jogo normal da posição geral é PSPACE. Seja H uma instância do jogo de formação de cliques e seja $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Vamos construir um grafo G tal que Alice tenha uma estratégia vencedora no jogo da posição geral em G se e só se o jogador 2 do jogo de formação de cliques em H tenha uma estratégia vencedora.

Seja G o grafo obtido de H adicionando um novo vértice u vizinho de todos os vértices de H e adicionando um novo vértice f_i , para cada vértice v_i de H , cujo único vizinho é v_i . Note que G tem diâmetro 4 (veja a Figura 9.3).

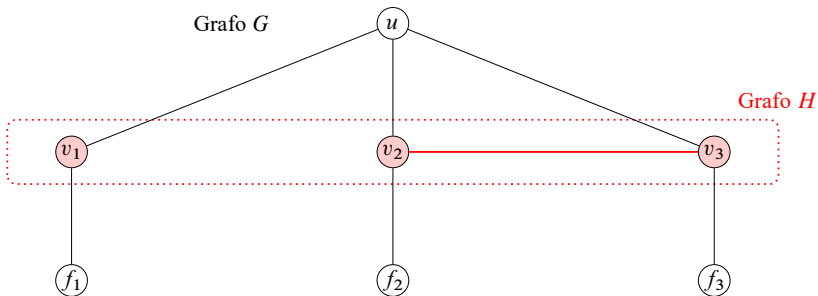


Figura 9.3: Alice tem uma estratégia vencedora em G no jogo normal da posição geral se e só se o jogador 2 tem uma estratégia vencedora em H no jogo de formação de cliques.

Se Alice escolhe v_i primeiro, Bob vence escolhendo f_i , pois a geodésica entre f_i e qualquer outro vértice de G passa por v_i . Analogamente se Alice seleciona f_i . Podemos então assumir que Alice escolhe u na primeira jogada.

Note que daí em diante Alice e Bob não podem escolher vértices não vizinhos v_i e v_j , pois $v_i - u - v_j$ é uma geodésica. Além disso, eles não podem escolher f_i e f_j tais que

²Do termo inglês *clique forming game*.

³O nome *Kayles* é uma versão inglesa do termo francês *Quilles*, que se refere a uma variante europeia antiga do jogo de boliche, jogado na grama. O jogo matemático *Kayles* foi introduzido por Dudeney (1908). O jogo *Node Kayles* é a versão de boliche em grafos, no qual se seleciona em cada jogada um vértice, o qual é *derrubado* junto com seus vizinhos, obtendo no final um conjunto independente maximal a partir dos vértices selecionados.

v_i e v_j não são vizinhos, pois $f_i - v_i - u - v_j - f_j$ é uma geodésica. Eles também não podem escolher v_i e f_j tais que v_i e v_j são não vizinhos, pois $v_i - u - v_j - f_j$ é uma geodésica. Finalmente eles não podem escolher v_i e f_i , pois $u - v_i - f_i$ é uma geodésica.

Seja $C = \{v_i \mid v_i \text{ ou } f_i \text{ foi escolhido}\}$. Do parágrafo anterior, temos que C é uma clique de H e podemos assumir que os jogadores não escolhem vértices f_1, \dots, f_n , pois selecionar f_i é essencialmente o mesmo que selecionar v_i .

Portanto, se o jogador 2 do jogo de formação de cliques em H tem uma estratégia vencedora, Alice tem uma estratégia vencedora no jogo normal da posição geral em G , pois ela será a segunda a jogar em H (lembre que u deve ser o primeiro vértice a ser escolhido). Além disso, se o jogador 1 do jogo de formação de cliques em H tem uma estratégia vencedora, Bob também tem em G , pois ele será o primeiro a jogar nos vértices de H . \square

Teorema 9.2 (Chandran S. V. et al. 2023). *O jogo pobre da posição geral geodésica é PSPACE-completo em grafos com diâmetro 4.*

Demonstração. Exercício 9.7. Baseado fortemente na redução do Teorema 9.1, com a pequena modificação descrita na Figura 9.4.

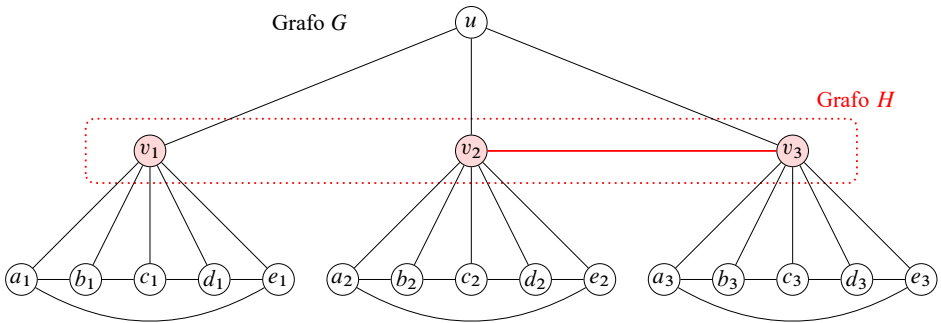


Figura 9.4: Alice tem uma estratégia vencedora em G no jogo pobre da posição geral se e só se o jogador 2 tem uma estratégia vencedora em H no jogo de formação de cliques.

\square

Finalmente é possível definir também o *jogo da posição convexa geodésica* (*geodesic convex position game*), com suas variantes normal e pobre, cuja diferença é que os vértices selecionados não bastam estar em posição geral, mas também devem estar sempre em posição convexa. Esse jogo foi provado PSPACE-completo por Araújo, Folz et al. (2023) em ambas as variantes normal e pobre.

Generalização dos jogos para qualquer convexidade

É possível definir esses jogos para qualquer convexidade \mathcal{C} de grafos como feito em (ibid.). Mas, antes, apresentamos os últimos jogos.

Harary (1984) menciona um jogo “*involving the convex hull*”, mas até recentemente nenhum jogo desse tipo havia sido publicado. Nesse sentido, Araújo, Folz et al. (2023) introduziram um jogo natural de convexidade em grafos, relacionado à envoltória do conjunto S de vértices selecionados, chamado *jogo da envoltória (hull game)*. O jogo é natural no sentido de que simulará um processo de ativação no grafo, que termina quando todo vértice for ativado. Ou seja, Alice e Bob selecionam vértices alternadamente até que $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$, sendo S o conjunto dos vértices selecionados até o momento.

Assim como há o jogo fechado do intervalo (Buckley e Harary 1985a), também é definido o *jogo fechado da envoltória (closed hull game)*, cuja única diferença para o jogo da envoltória é não poder selecionar vértices de $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$, o fecho convexo dos vértices já selecionados.

De modo semelhante, são definidos para qualquer convexidade \mathcal{C} de grafos os jogos do intervalo, da posição geral e da posição convexa. Por exemplo, sendo \mathcal{C} a convexidade P_3 , temos o jogo do intervalo (fechado) P_3 , o jogo da envoltória (fechada) P_3 , o jogo da posição geral P_3 e o jogo da posição convexa P_3 .

Além das variantes normal e pobre desses jogos, definidas anteriormente, também há a *variante ótima* (ou *de otimização*), bastante comum em outros problemas de jogos, como no *jogo de coloração em grafos* (Costa, Pessoa et al. 2020). Na variante ótima do jogo da envoltória, a instância tem também um inteiro k , além do grafo G , e o objetivo é decidir se Alice tem estratégia vencedora em que o conjunto S de vértices selecionados termine com no máximo k vértices. Ou seja, Alice é a jogadora cooperativa que deseja otimizar S (minimizando-o), enquanto Bob é o jogador não cooperativo que quer atrapalhar Alice (maximizando S), não importando quem termina o jogo (ao contrário das outras variantes).

São definidas também as variantes ótimas dos outros jogos vistos neste capítulo. Na variante ótima do jogo do intervalo, o objetivo é decidir se Alice possui uma estratégia vencedora na qual S termine com no máximo k vértices. Na variante ótima do jogo da posição geral e da posição convexa, o objetivo é decidir se Alice possui uma estratégia vencedora, na qual S termine com pelo menos k vértices. Note a mudança de *no máximo* para *pelo menos*, visto que naturalmente se deseja obter um conjunto mínimo de envoltória ou de intervalo e um conjunto máximo em posição geral ou posição convexa.

Geralmente variantes ótimas de jogos definem parâmetros de jogos como, por exemplo, o número cromático de jogo (ibid.). Com isso, definem-se parâmetros de jogos de convexidade das variantes ótimas dos seis jogos:

- *número do jogo da envoltória* $\text{ghn}_{\mathcal{C}}(G)$ (*game hull number*),
- *número do jogo do intervalo* $\text{gin}_{\mathcal{C}}(G)$ (*game interval number*),
- *número do jogo fechado da envoltória* $\text{cghn}_{\mathcal{C}}(G)$ (*closed game hull number*),
- *número do jogo fechado do intervalo* $\text{cgin}_{\mathcal{C}}(G)$ (*closed game interval number*),

- número do jogo da posição geral $\text{ggp}_C(G)$ (game general position number),
- posto do jogo $\text{grk}_C(G)$ (game rank),

que são basicamente os valores ótimos de k para os quais Alice possui uma estratégia vencedora. No caso do intervalo e da envoltória, deseja-se o mínimo k e, no caso da posição geral e da posição convexa, deseja-se o máximo k .

O lema abaixo mostra desigualdades simples entre os parâmetros de jogos de convexidade.

Lema 9.3 (Araújo, Folz et al. 2023). *Dada uma convexidade C sobre um grafo G com n vértices,*

- $\text{hn}_C(G) \leq \text{cghn}_C(G) \leq \text{ghn}_C(G) \leq \min \{ 2 \cdot \text{hn}_C(G) - 1, n \}$,
- $\text{in}_C(G) \leq \text{gin}_C(G) \leq \min \{ 2 \cdot \text{in}_C(G) - 1, n \}$,
- $\text{in}_C(G) \leq \text{cgin}_C(G) \leq n$,
- $\text{gp}_C(G) \geq \text{ggp}_C(G)$ e $\text{rk}_C(G) \geq \text{grk}_C(G)$ e $\text{ggp}_C(G) \geq \text{grk}_C(G)$.

Demonstração. Exercício 9.8. Note que as restrições dos jogos fechados da envoltória beneficiam apenas a Alice e ela pode sempre jogar nos vértices de um conjunto mínimo de envoltória. Além disso, toda posição convexa é posição geral. \square

O lema abaixo obtém um resultado para todos os jogos vistos neste capítulo sobre o grafo completo K_n nas convexidades P_3 , geodésica e monofônica.

Lema 9.4 (ibid.). *Seja $n \geq 2$. Na convexidade P_3 , Alice perde a variante normal e vence a variante pobre de todos os jogos deste capítulo sobre K_n . Nas convexidades geodésica e monofônica, Alice vence todos os jogos sobre K_n se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Ademais, todos os parâmetros de jogos sobre K_n são iguais a n nas convexidades monofônica e geodésica e são iguais a 2 na convexidade P_3 .*

Demonstração. Na convexidade P_3 , todos os jogos terminam na segunda jogada. Nas convexidades monofônica e geodésica, todo vértice deverá ser selecionado em todos os jogos. \square

O lema abaixo obtém um resultado para todos os jogos vistos neste capítulo sobre o ciclo C_n na convexidade monofônica.

Lema 9.5 (ibid.). *Seja $n \geq 4$. Bob vence as variantes normal e pobre de todos os jogos deste capítulo na convexidade monofônica no ciclo C_n , com exceção do jogo pobre da posição geral e da posição convexa, que são sempre vencidos por Alice. Ademais todo parâmetro de jogo é igual a 3 em C_n na convexidade monofônica, com exceção de $\text{ggp}_m(C_n) = \text{grk}_m(C_n) = 2$.*

Demonstração. No jogo normal, Bob escolhe um vértice não vizinho do primeiro vértice escolhido por Alice. No jogo pobre, Bob escolhe um vizinho. \square

Finalmente não é difícil ver que, apesar dos grafos construídos nas provas dos Teoremas 9.1 e 9.2 não serem necessariamente distância hereditária, os argumentos servem tanto pra convexidade geodésica quanto para a monofônica. Além disso, não valem apenas para posição geral, mas também para posição convexa. Com isso, temos o seguinte:

Corolário 9.1. *Os jogos da posição geral e da posição convexa são PSPACE-completos nas variantes normal e pobre nas convexidade geodésica e monofônica, mesmo em grafos com diâmetro 4.*

Jogos da Envoltória e Convexidades Geométricas

Vamos analisar o jogo da envoltória, definido na seção anterior, um pouco mais de perto e apresentar uma relação interessante entre convexidades geométricas (Capítulo 4) e estratégias vencedoras no jogo da envoltória.

Mostramos inicialmente alguns exemplos atingindo o limite superior e/ou limite inferior da primeira desigualdade do Lema 9.3 com relação à convexidade P_3 . Um exemplo no limite inferior do Lema 9.3 é K_n (ver Lema 9.4). Para limite superior, temos os ciclos C_4 e C_6 , pois $hn_{p_3}(C_4) = 2$, $cghn_{p_3}(C_4) = ghn_{p_3}(C_4) = 3$, $hn_{p_3}(C_6) = 3$, $cghn_{p_3}(C_6) = 4$ e $ghn_{p_3}(C_6) = 5$. Para limite inferior, temos o ciclo C_5 , pois $hn_{p_3}(C_5) = cghn_{p_3}(C_5) = ghn_{p_3}(C_5) = 3$. Um exemplo no meio é o ciclo C_7 , pois $hn_{p_3}(C_7) = 4$ e $cghn_{p_3}(C_7) = ghn_{p_3}(C_7) = 5 < 7$.

Com relação aos jogos fechados na convexidade geodésica em ciclos, Araújo, Folz et al. (ibid.) provaram o seguinte lema.

Lema 9.6 (ibid.). *Seja $n \geq 4$ e considere a convexidade geodésica. Alice vence a variante normal do jogo fechado da envoltória e do intervalo em C_n se e só se n é ímpar. Além disso, Bob sempre vence a variante pobre do jogo fechado da envoltória e do intervalo em C_n . Finalmente $cghn_g(C_n) = cgin_g(C_n) = ghn_g(C_n) = gin_g(C_n) = 3$.*

Demonstração. Considere C_n como o ciclo v_1, v_2, \dots, v_n e assuma que Alice seleciona v_1 em sua primeira jogada. Na variante pobre, Bob sempre seleciona o vértice $v_{\lfloor n/2 \rfloor}$ e Alice perde na jogada seguinte. Na variante normal, se n é par, Bob seleciona $v_{\lceil n/2 \rceil}$ e vence. Caso contrário, Alice consegue vencer na jogada seguinte. \square

Além desses resultados para grafos simples, Araújo, Folz et al. (ibid.) também obtêm uma conexão interessante entre convexidades geométricas, vistas no Capítulo 4, e estratégias vencedoras nos jogos de envoltória.

Teorema 9.3 (ibid.). *Seja C uma convexidade geométrica⁴ sobre G . Alice vence o jogo da envoltória sobre G na convexidade C se e só se n é ímpar na variante normal ou n é*

⁴Também se diz que C é uma geometria convexa sobre G .

par na variante pobre. Além disso,

$$\text{ghn}_{\mathcal{C}}(G) = \min \left\{ 2 \cdot |\text{Ext}_{\mathcal{C}}(G)| - 1, n \right\}.$$

Demonstração. Seja $F = \text{Ext}_{\mathcal{C}}(G)$. Como \mathcal{C} é uma convexidade geométrica sobre G , então F é um conjunto de envoltória. Como $V(G) \setminus \{f\}$ é convexo para todo $f \in F$, todo vértice de F deve ser selecionado durante o jogo do intervalo e do jogo da envoltória. Portanto o jogo da envoltória termina quando o último vértice de F é selecionado. Na variante normal, se n é ímpar, Alice joga evitando os dois últimos vértices de F forçando Bob a selecionar o penúltimo vértice de F , ocasionando a vitória de Alice na jogada seguinte. Se n é par, Bob vence seguindo esse mesmo argumento. Na variante pobre, se n é par, Alice joga evitando o último vértice de F , forçando Bob a selecioná-lo e a perder o jogo. Se n é ímpar, Bob vence seguindo esse mesmo argumento. \square

As convexidades monofônica, geodésica e P_3 são tratadas abaixo.

Corolário 9.2 (Araújo, Folz et al. 2023). *Em grafos Ptolemaicos (resp. cordais), Alice vence o jogo da envoltória geodésica (resp. monofônica) se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre.*

Corolário 9.3 (ibid.). *Seja T uma árvore enraizada, em que todo vértice interno (não folha) tem pelo menos dois filhos. Então Alice vence o jogo P_3 da envoltória em T se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Além disso, $\text{ghn}_{P_3}(T) = n$.*

Demonstração. Note que $\text{Ext}_{P_3}(T)$ é o conjunto de folhas de T , além de ser também um conjunto de envoltória P_3 de T , já que todo vértice interno tem dois filhos. Logo, seguindo os argumentos na prova do Teorema 9.3, temos o resultado. Finalmente $n \leq 2 \cdot |\text{Ext}_{P_3}(T)| - 1$. \square

Por fim, Araújo, Folz et al. (ibid.) também obtêm resultados de PSPACE-completude para o jogo da envoltória nas convexidades monofônica e geodésica. No *jogo simplificado da envoltória*, a instância é um grafo G e um vértice v de G , que já está selecionado antes do início do jogo. Claramente Bob tem uma estratégia vencedora no jogo da envoltória sobre G se e só se Alice tem uma estratégia vencedora no jogo simplificado da envoltória sobre (G, v) para todo $v \in V(G)$. A redução do teorema a seguir é idêntica a do Teorema 5.4.

Teorema 9.4 (ibid.). *Os jogos simplificados da envoltória monofônica e geodésica são PSPACE-completos na variante pobre mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Demonstração. Seja H um grafo não completo, instância do jogo de formação de cliques, como no Teorema 9.1. Seja G o grafo de diâmetro 2 obtido de H , adicionando dois vértices novos u_1 e u_2 adjacentes a todo vértice de H . Seja u_1 o vértice que já está selecionado no jogo simplificado da envoltória. Prova-se que Alice tem uma estratégia vencedora no

jogo de formação de cliques sobre H se e só se ela tem uma estratégia vencedora na variante pobre do jogo simplificado da envoltória monofônica sobre (G, u_1) . Se um jogador escolhe u_2 , ele perderá imediatamente, pois $\text{conv}_g(\{u_1, u_2\}) = V(G)$. Além disso, se um jogador seleciona um vértice v_j de H e existe um vértice selecionado v_i não vizinho de v_j em H , então ele perde imediatamente, pois $\text{conv}_g(\{v_i, v_j\}) = V(G)$. Portanto podemos assumir que o conjunto S de vértices selecionados formam uma clique em todas as jogadas, exceto na última. Isso está diretamente relacionado ao jogo de formação de cliques em H . Se Alice tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H , então Bob é o primeiro a selecionar um vértice de G com um não vizinho selecionado, perdendo o jogo pobre da envoltória. Analogamente se Bob tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H . \square

Teorema 9.5 (ibid.). *Os jogos simplificados da envoltória monofônica e geodésica são PSPACE-completos na variante normal.*

Demonstração. Considere a mesma redução do Teorema 9.4, mas incluindo a G um vértice w isolado. Como antes, seja u_1 o vértice que já está selecionado antes do jogo começar. Se um jogador escolhe w (resp. u_2) quando u_2 (resp. w) ainda não foi escolhido, ele perde imediatamente, pois o oponente escolhe u_2 (resp. w), vencendo o jogo normal já que $\text{conv}_q(\{u_1, u_2, w\}) = V(G)$. Além disso, se um jogador escolhe um vértice v_j de H no jogo da envoltória e existe um vértice escolhido não adjacente v_i em H , então o jogador perde imediatamente, pois o oponente escolhe w , vencendo o jogo, pois $\text{conv}_g(\{v_i, v_j, w\}) = V(G)$. Portanto, pode-se assumir que o conjunto S de vértices selecionados formam uma clique em todas as jogadas, exceto nas duas últimas. Como no Teorema 9.4, isso está diretamente relacionado ao jogo de formação de cliques em H : Alice tem uma estratégia vencedora na variante normal do jogo simplificado da envoltória (monofônica e geodésica) em G se e só se ela tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H . \square

Note que os grafos construídos nessas reduções não são necessariamente distância hereditária, ou seja, as convexidades monofônica e geodésica podem diferir. No entanto, como mostrado, os argumentos valem para ambas as convexidades e também para o jogo fechado da envoltória.

Corolário 9.4 (ibid.). *Os jogos da envoltória e da envoltória fechada nas convexidades geodésica e monofônica nas variantes normal e pobre são PSPACE-completos.*

9.3 Exercícios

Exerc. 9.1. Prove que $\text{hn}_{p_3}(C_4) = 2$ e $\text{cghn}_{p_3}(C_4) = \text{ghn}_{p_3}(C_4) = 3$.

Exerc. 9.2. Prove que $\text{hn}_{p_3}(C_5) = \text{cghn}_{p_3}(C_5) = \text{ghn}_{p_3}(C_5) = 3$.

Exerc. 9.3. Prove que $hn_{p_3}(C_6) = 3$, $cghn_{p_3}(C_6) = 4$ e $ghn_{p_3}(C_6) = 5$.

Exerc. 9.4. Prove que $hn_{p_3}(C_7) = 4$ e $cghn_{p_3}(C_7) = ghn_{p_3}(C_7) = 5$.

Exerc. 9.5. Prove o Lema 9.1.

Exerc. 9.6. Prove o Lema 9.2 (Dica: Lema 3.4).

Exerc. 9.7. Prove o Teorema 9.2 (Dica: Teorema 9.1 e Figura 9.4).

Exerc. 9.8. Prove o Lema 9.3.

A

Teoria dos Grafos

Um grafo (simples) G é formado por um conjunto de *vértices*, denotado por $V(G)$, e um conjunto de *arestas*, denotado por $E(G)$. Cada aresta é um par (não ordenado) de vértices distintos. Se xy é uma aresta, então os vértices x e y são os *extremos* desta aresta. Dizemos também que x e y estão *conectados*, são *adjacentes* ou são *vizinhos*. Um grafo pode ser representado geometricamente como um conjunto de pontos no plano (representando os vértices) e linhas que ligam estes pontos (representando as arestas). Observamos que o mesmo grafo pode ter várias representações geométricas diferentes.

Exemplo A.1. *Seja G o grafo tal que $V(G) = \{a, u, v, w, x, y, z\}$ e $E(G) = \{uv, vw, wx, xy, yz, zu, av, ax, az\}$. Na Figura A.1, temos duas representações geométricas diferentes para G .*

Usa-se a notação $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$. A *ordem* de G é n e o *tamanho* é $n + m$. O *grafo trivial* tem apenas um vértice. O *grafo nulo* tem $V(G) = \emptyset$.

Um *multigrafo* generaliza o conceito de grafo simples. Nele podem existir *arestas paralelas ou múltiplas* (arestas com os mesmos extremos) e *laços* (arestas da forma xx). Um *digrafo* (ou *grafo direcionado*) também generaliza grafos simples. Nele as arestas são pares ordenados de vértices distintos, muitas vezes chamadas de *arcos*. Ou seja, xy e yx representam arestas (arcos) diferentes.

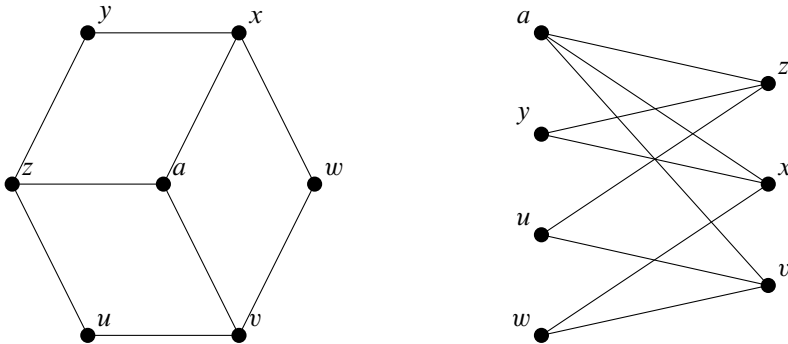


Figura A.1: Duas representações geométricas diferentes para o mesmo grafo.

Vizinhança, grau, subgrafos e complemento

A *vizinhança* de um vértice v é o conjunto de seus vizinhos. Utilizamos a notação $N(v)$ para designar a vizinhança de v . A *vizinhança fechada* de um vértice v é definida como $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. O *grau* de um vértice é o número de vezes em que ele ocorre como extremo de uma aresta. (Essa definição se aplica tanto para grafos como para multigrafos.) Utilizamos a notação $d(v)$ para designar o grau do vértice v . Em um grafo simples, o grau de um vértice é igual ao número de vizinhos que ele possui, isto é, $d(v) = |N(v)|$.

Um grafo é *regular* quando todos os seus vértices têm o mesmo grau. Um grafo é *k-regular* quando todos os seus vértices têm grau igual a k .

O *grau máximo* de G é definido como $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$. O *grau mínimo* de G é definido como $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$.

Dado um grafo G tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ e os graus dos vértices satisfazem $d(v_1) \leq d(v_2) \leq \dots \leq d(v_{n-1}) \leq d(v_n)$, a *seqüência de graus* de G é precisamente a seqüência $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_{n-1}), d(v_n))$.

Exemplo A.2. A seqüência de graus do grafo G definido anteriormente no Exemplo A.1 é $(2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$. Temos que $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.

Um vértice é *isolado* quando tem grau zero (não possui vizinhos). Um vértice v é *universal* quando está conectado por arestas a todos os demais vértices, isto é, $N(v) = V(G) \setminus \{v\}$. Se v é um vértice universal, então $d(v) = n - 1$.

O seguinte teorema é conhecido como *Teorema do Aperto de Mãos*:

Teorema A.1. Em qualquer grafo simples G , $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Demonstração. Observe que cada aresta xy é contada duas vezes na soma $\sum_{v \in V(G)} d(v)$ – uma vez na parcela $d(x)$ e outra na parcela $d(y)$. \square

Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. H é um *subgrafo próprio* de G quando H é um subgrafo de G que não é o próprio G . Um *subgrafo gerador* (*spanning subgraph*) de G é um subgrafo H de G tal que $V(H) = V(G)$. Em outras palavras, H tem os mesmos vértices de G , mas não necessariamente todas as arestas de G .

Um subgrafo H de G é um *subgrafo induzido por um conjunto de vértices* $X \subseteq V(G)$ se $V(H) = X$ e H possui a seguinte propriedade: se $xy \in E(G)$ e $x, y \in X$, então $xy \in E(H)$. Neste caso, utilizamos a notação $H = G[X]$. Informalmente um subgrafo induzido por um conjunto de vértices X mantém todas as arestas originais de G que possuem seus dois extremos em X . Um subgrafo H de G é um *subgrafo induzido por um conjunto de arestas* $E' \subseteq E(G)$ se: (a) $E(H) = E'$; (b) $V(H) = \{x \mid x \text{ é extremo de alguma aresta de } E'\}$. Utilizamos a notação $H = G[E']$ para designar que H é um subgrafo induzido por um conjunto de arestas E' .

A seguinte notação é bastante útil. Se S é um subconjunto de vértices de G , então $G - S = G[V(G) \setminus S]$. Se v é um vértice de G , então $G - v = G - \{v\}$. Se E' é um subconjunto de arestas de G , então o grafo $G - E'$ é definido da seguinte forma: $V(G - E') = V(G)$ e $E(G - E') = E(G) \setminus E'$. Se e é uma aresta de G , então $G - e = G - \{e\}$.

A *união* $G \cup H$ de dois grafos G e H é o grafo com $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. A *interseção* $G \cap H$ de dois grafos G e H é o grafo com $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$ e $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$.

Dois grafos G e H são *disjuntos em vértices* se $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Dois grafos G e H são *disjuntos em arestas* se $E(G) \cap E(H) = \emptyset$. Se G e H são disjuntos em vértices, então é claro que são também disjuntos em arestas. Porém G e H podem ser disjuntos em arestas tendo alguns vértices em comum.

O *complemento* de um grafo G é o grafo \overline{G} tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{xy \mid xy \notin E(G)\}$. Note que G e \overline{G} são grafos disjuntos em arestas. Portanto $G \cap \overline{G}$ é um grafo sem arestas. Além disso, $G \cup \overline{G}$ é um grafo completo.

Exemplo A.3. Se G é o grafo do Exemplo A.1, então \overline{G} é o grafo da Figura A.2.

Cliques, caminhos e ciclos

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois vértices são vizinhos. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices: K_1 é o grafo trivial, K_2 tem dois vértices e uma aresta e K_3 é o triângulo. A Figura A.3 exibe os grafos K_3 , K_4 e K_5 .

Uma *clique* em G é um subconjunto $K \subseteq V(G)$ tal que $G[K]$ é completo (quaisquer dois vértices são adjacentes). A cardinalidade de uma maior clique em G é denotada por $\omega(G)$. Um *conjunto independente* em G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $G[S]$ é um grafo sem arestas (quaisquer dois vértices são não adjacentes). A cardinalidade de um maior conjunto independente de G é denotado por $\alpha(G)$.

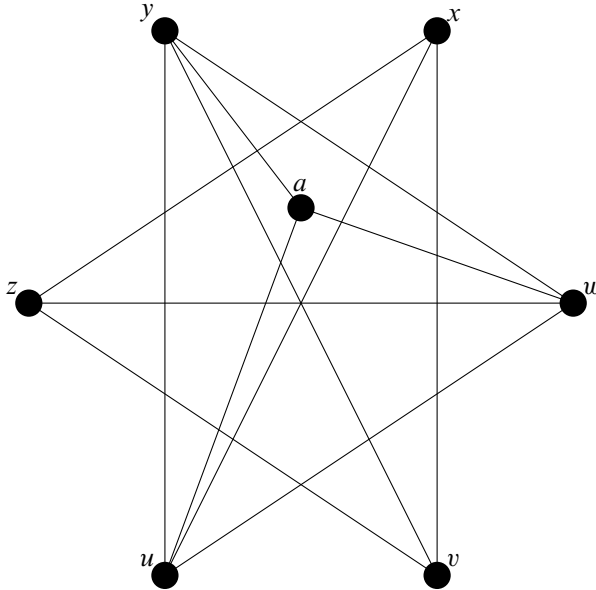


Figura A.2: Representação geométrica de \overline{G} , em que G é o grafo do Exemplo A.1.

Um *passoio* é uma sequência de vértices $v_1v_2 \dots v_k$ tal que $v_jv_{j+1} \in E(G)$ para $1 \leq j < k$. Pode haver repetição de vértices e arestas em um passeio. Se $v_1 = v_k$, dizemos que o passeio é *fechado*, caso contrário é *aberto*. Uma *trilha* é um passeio sem repetição de arestas, podendo haver repetição de vértices. Um *caminho* é uma trilha sem repetição de vértices. O *comprimento* de um caminho é seu número de arestas. Se P é um caminho e u, v são vértices deste caminho, denotamos por $P[u, v]$ o subcaminho de P que vai de u até v . Um *ciclo* é uma trilha fechada $v_1v_2 \dots v_{k-1}v_k$ com $k \geq 4$ tal que $v_1v_2 \dots v_{k-1}$ é um caminho. O comprimento de um ciclo é seu número de arestas (ou vértices).

Uma *corda* é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos de um ciclo (ou caminho). Um *ciclo* (resp. *caminho*) *induzido* em G é um ciclo (resp. caminho) sem cordas. Usam-se as notações P_n e C_n para o caminho e o ciclo induzidos com n vértices, respectivamente.

Exemplo A.4. Considere novamente o grafo G do Exemplo A.1. Então: $uvazyxaz$ é um passeio aberto, $uvazyxazu$ é um passeio fechado, $avwxazy$ é uma trilha aberta, $uvwxazy$ é um caminho, $uvwxy$ é um caminho induzido, $uvwxzyu$ é um ciclo e $uvazu$ é um ciclo induzido.

Observação A.1. Muitas vezes, passeios, trilhas, caminhos e ciclos são considerados como grafos (ou subgrafos) em vez de sequências de vértices. Por exemplo, podemos nos

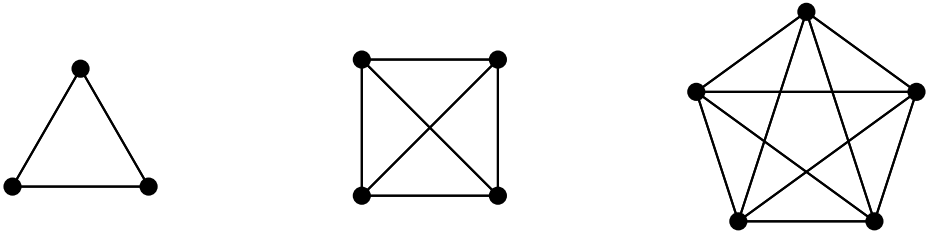


Figura A.3: Da esquerda para a direita: grafos K_3 , K_4 e K_5 .

referir a um caminho P com k vértices como um grafo P tal que $V(P) = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $E(P) = \{v_j v_{j+1} \mid 1 \leq j < k\}$.

Distância, diâmetro, otimalidade e isomorfismo

A *distância* entre vértices x e y é o comprimento do menor caminho de x a y no grafo. Usamos a notação $dist(x, y)$ para a distância entre x e y . Para todo vértice x , $dist(x, x) = 0$. A *excentricidade* de um vértice v em um grafo G é definida como: $exc(v) = \max\{dist(v, x) \mid x \in V(G)\}$. O *diâmetro* de um grafo G é definido como: $diam(G) = \max\{exc(v) \mid v \in V(G)\}$. O *centro* de um grafo G é o conjunto de vértices de G com excentricidade mínima.

Dois grafos G e H são *isomorfos* se existe uma bijeção $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $xy \in E(G)$ se, e somente se, $f(x)f(y) \in E(H)$. Informalmente G e H são o *mesmo* grafo, a menos de rotulações distintas para os vértices. Utilizamos a notação $G \cong H$ para designar que G e H são isomorfos. Sejam G e H grafos quaisquer. Se existir algum subgrafo G' de G que seja isomorfo a H , dizemos que G *contém* H . Se existir algum subgrafo induzido G' de G que seja isomorfo a H , dizemos que G *contém* H como subgrafo induzido. Se nenhum subgrafo induzido de G é isomorfo a H , dizemos que G é *livre de* H .

Um conjunto S é *minimal* (resp. *maximal*) em relação a uma propriedade P se: (a) S satisfaz P e (b) não existe conjunto $S' \subsetneq S$ (resp. $S' \supsetneq S$) que satisfaça P . Um conjunto S é *mínimo* (resp. *máximo*) em relação a uma propriedade P se: (a) S satisfaz P e (b) não existe conjunto S' que satisfaz P com $|S'| < |S|$ (resp. $|S'| > |S|$). Todo conjunto mínimo (resp. máximo) é também minimal (resp. maximal), mas nem todo conjunto minimal (resp. maximal) é mínimo (resp. máximo). Os conceitos *minimal/mínimo* e *maximal/máximo* também se aplicam a grafos e subgrafos.

Exemplo A.5. No grafo do Exemplo A.1, $S_1 = \{u, w, y\}$ e $S_2 = \{a, v, x, z\}$ são conjuntos independentes maximais, mas só S_2 é máximo.

Exemplo A.6. Um subconjunto $C \subseteq V(G)$ é uma cobertura (por vértices) de G se toda aresta tem pelo menos um extremo em C . Sendo S_1 e S_2 os mesmos do exemplo anterior, S_1 e S_2 são coberturas minimais de G , mas só S_1 é mínima.

Grafos conexos, árvores e grafo bipartidos

Um grafo G é *conexo* se existe caminho entre qualquer par de vértices de G . Caso contrário, G é *desconexo*. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G . Denotamos por $w(G)$ o número de componentes conexas de G . É claro que G é conexo se, e somente se, $w(G) = 1$.

Uma *árvore* T é um grafo conexo sem ciclos. Uma *floresta* é um grafo cujas componentes conexas são árvores. Os vértices de uma árvore são muitas vezes chamados de *nós*, os vértices de grau 1 são as *folhas* e os demais são os *nós internos*. É fácil provar que toda árvore tem $m = n - 1$ e pelo menos 2 folhas. Dizemos que uma árvore é *enraizada* quando é definido sobre ela um vértice especial r chamado *raiz* com grau maior que 1. Em uma árvore enraizada, o primeiro vértice no caminho de um vértice v para a raiz é chamado de *pai* de v , e os demais vizinhos são chamados de *filhos* de v . Quando se usa termos como filho, pai ou raiz em uma árvore, sempre está implícito que a árvore é enraizada, ou seja, possui uma raiz sobre a qual se baseiam esses conceitos. Uma árvore é binária (resp. completamente binária) quando todo nó interno tem no máximo (resp. exatamente) 2 filhos. É fácil provar que toda árvore completamente binária tem $n = 2f - 1$ vértices, sendo f o número de folhas.

Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em conjuntos V_1 e V_2 de modo que toda aresta de G tem um extremo em V_1 e outro em V_2 . Portanto V_1 e V_2 são conjuntos independentes. No Exemplo A.1, o grafo é bipartido com $V_1 = \{a, u, w, y\}$ e $V_2 = \{v, x, z\}$.

Um grafo G é *bipartido completo* se, para todo par de vértices x, y com $x \in V_1$ e $y \in V_2$, vale $xy \in E(G)$. Denotamos por $K_{p,q}$ um grafo bipartido completo com p vértices em V_1 e q vértices em V_2 . Obviamente $K_{p,q}$ tem pq arestas. Sabe-se que um grafo é bipartido se e só se não tem ciclos ímpares.

Uma generalização de grafo bipartido completo é a definição de *grafo k -partido completo*, que é aquele cujo conjunto de vértices está particionado em conjuntos independentes V_1, V_2, \dots, V_k tais que existe uma aresta entre dois vértices x e y se, e somente se, x e y pertencem a conjuntos distintos desta partição.

Propriedades hereditárias e monótonas

Uma propriedade de grafos é *monótona* (resp. *hereditária*) se todo subgrafo (resp. subgrafo induzido) de um grafo que possui a propriedade também possui a propriedade. Toda propriedade monótona é hereditária, pois, se vale para todo subgrafo, também vale para todo subgrafo induzido, mas nem toda propriedade hereditária é monótona. Por exemplo, a propriedade de *ter um vértice universal* não é uma propriedade hereditária nem monótona. A propriedade de *ser livre de triângulos* é monótona e, portanto, também hereditária. A propriedade de *ser livre de C_4 induzido* é hereditária, mas não é monótona (por exemplo, K_5 é livre de C_4 induzido, mas removendo 1 vértice e algumas arestas podemos obter um subgrafo C_4 não induzido). Além disso, a propriedade de *ser um grafo completo* é

hereditária, mas não é monótona.

Digrafos

Um *grafo direcionado* (ou *digrafo*) D é formado por uma tripla consistindo de um conjunto de vértices $V(D)$, um conjunto de *arcos* $A(D)$ e uma função que associa a cada arco um par *ordenado* de vértices não necessariamente distintos.

Para um digrafo D , se (u, v) é o par de vértices associado ao arco $a \in A(D)$, então dizemos que u e v são as *extremidades* de a . Dizemos ainda que a é um arco de u para v , sendo u a *cauda* de a e v a *cabeça* de a ; dizemos também que u é *predecessor* de v e v *sucessor* de u .

Em um digrafo D , um *laço* é um arco em D cujas extremidades são iguais. Dizemos ainda que dois arcos são *arcos múltiplos* se ambos têm a mesma cauda e a mesma cabeça. Um digrafo D é dito *simples* se D não possui arcos múltiplos.

Note que um digrafo simples pode possuir um laço, assim como dois arcos, em sentidos opostos, entre um mesmo par de vértices.

Se D é um digrafo, então o *grafo subjacente* de D é o grafo G obtido de D ao tomarmos o mesmo conjunto de vértices e ao considerarmos os arcos de D como arestas, ou seja, pares não ordenados de vértices.

As noções de passeio, trilha, caminho e ciclo em um digrafo D são análogas, apenas respeitando a orientação dos arcos. Ou seja, por exemplo, se $P = v_1, a_1, v_2, \dots, a_{n-1}, v_n$ é um caminho em D , então o arco a_i é associado ao par (v_i, v_{i+1}) para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Vale ressaltar que alguns autores preferem denotar um ciclo em um grafo direcionado por *circuito*. As noções de subgrafo e isomorfismo também são análogas.

Seja v um vértice em um digrafo D . O *grau de saída* $d_D^+(v)$ (resp. *grau de entrada* $d_D^-(v)$) é o número de arcos em que v é cauda (resp. v é cabeça). A *vizinhança de saída* (resp. *vizinhança de entrada*) de v é o conjunto

$$N_D^+(v) = \{u \mid (v, u) \text{ é associado a um arco de } D\}$$

resp.

$$N_D^-(v) = \{u \mid (u, v) \text{ é associado a um arco de } D\}.$$

Quando não há ambiguidades, pode-se omitir o digrafo D no subscrito dessas definições.

Um *grafo orientado* D é o digrafo obtido pela orientação de um grafo simples G , ou seja, pela troca de cada aresta de G por um par ordenado com as mesmas extremidades.

Grafos planares

Uma *curva* é uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Uma u, v -curva é tal que $f(0) = u$ e $f(1) = v$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$. Uma curva é *poligonal* se é composta por uma sequência finita de segmentos de reta. Uma curva f é *simples* se f é injetiva no intervalo

$(0, 1)$, ou seja, a própria curva não se intersecta, a menos possivelmente no caso em que $u = v$. Uma u, v -curva é *fechada* se $u = v$. Uma *representação ou imersão* de um grafo G no plano é uma função que associa a cada vértice um ponto em \mathbb{R}^2 e a cada aresta $e = uv$ uma u, v -curva poligonal simples. Se duas arestas se intersectam na representação de um grafo G , tal interseção é uma *cruzamento*. Um grafo *planar* é um grafo que admite uma representação no plano \mathbb{R}^2 sem cruzamento de arestas.

Coloração de Grafos

Uma k -coloração de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ se u e v são vizinhos em G . O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor número natural k tal que G admite uma k -coloração. Uma k -coloração para $k = \chi(G)$ é uma *coloração ótima* de G .

Se c é uma coloração de G , então o conjunto $S_i = \{v \in V(G) \mid c(v) = i\}$ é uma *classe de cor* para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Note que cada classe de cor define um conjunto independente do grafo. Os seguintes limitantes são bem conhecidos para o número cromático:

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Decomposição em árvore e em caminho

Uma *decomposição em árvore* (resp. *decomposição em caminho*) de um grafo $G = (V, E)$ é um par (T, \mathcal{X}) em que T é uma árvore (resp. um caminho) e \mathcal{X} é uma família de subconjuntos de $V(G)$, de modo que há uma bijeção entre $V(T)$ e \mathcal{X} , sendo cada vértice $t \in V(T)$ associado a um elemento, popularmente conhecido como *sacola (bag)*, $B_t \in \mathcal{X}$, satisfazendo as seguintes condições:

1. Para cada $u \in V(G)$, existe $t \in V(T)$ tal que $u \in B_t$;
2. Para cada aresta $e = uv \in E(G)$, existe $t \in V(T)$ tal que $\{u, v\} \subseteq B_t$;
3. Para cada $u \in V(G)$, se $S = \{t \in V(T) \mid u \in B_t\}$, então $T[S]$ é subárvore de T .

A *largura* da decomposição em árvore (resp. em caminho) (T, \mathcal{X}) de G é o valor máximo $\max_{t \in T} |B_t| - 1$. A *largura em árvore* (resp. *largura em caminho*) de G é a menor largura de uma decomposição em árvore (resp. em caminho) de G . A noção de largura em árvore foi apresentada por Robertson e Seymour (1986) na demonstração do famoso Teorema de Menores de Grafos. Atualmente é um conceito bastante explorado como parâmetro estrutural do grafo no desenvolvimento de algoritmos FPT.

B

Complexidade Computacional

Complexidade de Tempo

Em um *problema de decisão*, é dada uma instância e pede-se uma resposta SIM ou NÃO a uma pergunta sobre a instância. Por exemplo, no Problema COBERTURA DE VÉRTICES de decisão, a instância é um grafo G e um inteiro $k \geq 1$, sendo a pergunta se existe um subconjunto S com no máximo k vértices de G de modo que cada aresta de G possui alguma extremidade em S .

A *Classe P* é definida como o conjunto dos problemas de decisão que possuem algoritmos polinomiais que os resolvam. A *Classe NP* é definida como o conjunto dos problemas de decisão que são *verificáveis* em tempo polinomial. Em outras palavras, se for dado um *certificado* (ou *prova*) de que a instância tem resposta SIM no problema de decisão, é possível verificar em tempo polinomial que o *certificado* é válido (com o certificado temos a prova que a instância tem de fato resposta SIM). Como exemplo, mostramos abaixo que o problema COBERTURA DE VÉRTICES pertence à classe NP.

Teorema B.1 (Garey e Johnson 1979). *COBERTURA DE VÉRTICES pertence à classe NP.*

Demonstração. Para certificado de uma instância (G, k) , considere um subconjunto S de vértices do grafo G . O algoritmo verificador para o certificado S deve verificar: (a) se $|S| \leq k$ e (b) se toda aresta de G possui pelo menos uma extremidade em S . Para (a), basta contar os elementos de S , o que leva tempo $O(k) = O(n)$. Para (b), basta percorrer todas as arestas de G (existem $O(n^2)$ arestas) e verificar se alguma de suas extremidades está em S ($|S| = k \leq n$), resultando num tempo total de $O(kn^2) = O(n^3)$. Logo

podemos verificar se S é cobertura para G em tempo polinomial $O(n) + O(n^3) = O(n^3)$.
□

Um problema de decisão A se *reduz polinomialmente* a um problema de decisão B (denotamos $A \leq_p B$ e dizemos que A se reduz polinomialmente a B) se existe um algoritmo F de tempo polinomial que, para cada instância I de A , obtém uma instância $F(I)$ de B de modo que: I é SIM em A se, e somente se, $f(I)$ é SIM em B . O algoritmo F é chamado de *função de redução*.

Um problema de decisão B é *NP-Difícil* se, para todo $A \in \text{NP}$, temos $A \leq_p B$, isto é, qualquer problema em NP se reduz polinomialmente a B . Um problema é *NP-completo* se é NP-difícil e se pertence a NP.

Um importante resultado clássico da Teoria da Complexidade é o seguinte.

Teorema B.2 (Garey e Johnson 1979). *Se um problema B é NP-completo e $B \in \text{P}$, então $\text{P} = \text{NP}$. Além disso, se $\text{P} = \text{NP}$, então todo problema NP-completo está em P .*

A questão $\text{P} = \text{NP}$ é uma das mais importantes e antigas da Ciência da Computação, que continua sem resposta. É também um dos sete problemas do milênio do Instituto Clay de Matemática, com um prêmio de 1 milhão de dólares para quem resolvê-lo. De acordo com o Teorema B.2, uma forma de resolver tal questão é mostrar a existência de um problema $B \in \text{P}$ que seja NP-completo. Mostrando que não existe um problema $B \in \text{P}$ que seja NP-completo, podemos concluir, pelo Teorema B.2, que $\text{P} \neq \text{NP}$.

Outra importância do Teorema B.2, além de ajudar a resolver a questão $\text{P} = \text{NP}$, é que podemos classificar os problemas pelo grau de dificuldade, pois, uma vez que mostramos que um problema é NP-completo, também estamos mostrando que esse problema não possui algoritmo polinomial conhecido e que encontrar esse algoritmo polinomial é bem difícil, se ele existir. Dizemos que um problema em P é *tratável* (ou *fácil*) de resolver enquanto os problemas NP-difíceis são *intratáveis* (ou *difíceis*) de resolver.

Com isso, percebe-se a importância de mostrar-se que um problema é NP-completo. Para isso, uma ferramenta bastante utilizada é descrita no teorema abaixo.

Teorema B.3 (ibid.). *Se B é NP-completo, $C \in \text{NP}$ e $B \leq_p C$, então C é NP-completo.*

Com o Teorema B.3, podemos mostrar que um problema é NP-completo sem utilizar diretamente a definição. A dificuldade passa a ser encontrar um problema NP-completo e uma redução polinomial desse problema para o problema que queremos mostrar ser NP-completo.

O primeiro problema NP-completo demonstrado foi o Problema SAT, definido a seguir. Dizemos que uma fórmula lógica está na *forma normal conjuntiva* se consiste de conjunções (operador lógico *e* (*and*), denotado por \wedge) de cláusulas, que, por sua vez, consistem de disjunções (operador *ou* (*or*), denotado por \vee) de literais (variável lógica ou complemento de variável lógica). Por exemplo, a fórmula lógica $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$, que possui 2 cláusulas com 3 literais cada, está na forma normal conjuntiva, sendo x_1 , x_2 e x_3 variáveis lógicas. Dizemos que uma fórmula lógica na forma normal conjuntiva é *satisfatível* se existe uma atribuição de V ou F às variáveis de modo que o

resultado da fórmula com essa atribuição seja V. Temos que ϕ é satisfatível, pois resulta em V quando todas suas variáveis são valoradas com V.

No Problema SAT, a instância é uma fórmula ϕ na forma normal conjuntiva e sua pergunta é a seguinte: ϕ é satisfatível? No Problema 3SAT, a única diferença consiste em que a fórmula ϕ da forma normal conjuntiva possui 3 literais por cláusula. Partindo do PROBLEMA SAT e utilizando o Teorema B.3, pode-se concluir que o PROBLEMA 3SAT também é NP-completo.

Abaixo, ilustra-se uma prova de NP-completude a partir de 3SAT.

Teorema B.4 (ibid.). *COBERTURA DE VÉRTICES é NP-completo.*

Demonstração. Do Teorema B.1 temos que COBERTURA DE VÉRTICES está em NP e sabemos que 3SAT é NP-completo. Mostramos agora uma redução polinomial do 3SAT para o COBERTURA DE VÉRTICES considerando que (ϕ) é uma instância do 3SAT e (G, k) a instância do COBERTURA DE VÉRTICES que será gerada a partir de ϕ . Considere que v é a quantidade de variáveis de ϕ e c é a quantidade de cláusulas de ϕ .

Construção: (a) para cada variável x de ϕ , criar vértices x e \bar{x} ; e uma aresta $x\bar{x}$ em G (chamamos os vértices x e \bar{x} de vértices variáveis); (b) para cada cláusula de $(x \vee y \vee z)$ de ϕ , criar um ciclo de tamanho 3 (x, y, z) em G (chamamos os vértices x, y e z de vértices cláusulas); (c) ligar os vértices variáveis aos vértices cláusulas que correspondem ao mesmo literal em ϕ ; e (d) $k = v + 2c$. A Figura B.1 mostra o exemplo para $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)$.

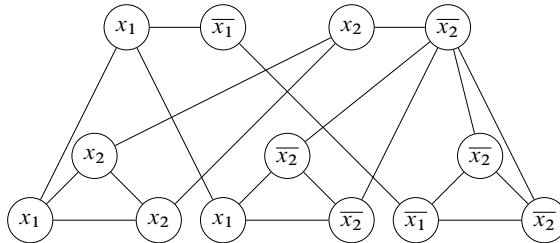


Figura B.1: $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)$. Os vértices de cima foram criados a partir das variáveis x_1 e x_2 , enquanto os vértices de baixo (que induzem um ciclo de tamanho 3) foram criados a partir das cláusulas. As arestas de cima para baixo ligam vértices de literais correspondentes.

G possui $2v + 3c$ vértices e $v + 6c$ arestas e (G, k) é gerado em tempo polinomial. Mostramos que ϕ é satisfatível se e só se G possui uma cobertura de tamanho $k = v + 2c$.

Se ϕ é satisfatível, então existe uma valoração V ou F válida para as variáveis de ϕ em que cada cláusula de ϕ é V. Escolha os vértices variáveis de G que correspondem aos literais V da valoração e, para cada cláusula C , escolha dois vértices cláusulas de C de modo que o terceiro vértice cláusula corresponda a um literal V na valoração. Veja que temos $v + 2c = k$ vértices escolhidos. Note que cada aresta de G possui uma extremidade

que é um vértice escolhido: para as arestas criadas em (a), exatamente um dos literais x ou \bar{x} foi escolhido; para as arestas criadas nos ciclos de tamanho três em (b), dois vértices de cada ciclo foram escolhidos; e para cada aresta criada em (c), uma de suas extremidades é vértice variável u_v , e a outra é um vértice cláusula u_c . Se u_v não é escolhido, corresponde a um literal F para a valoração e , nessa situação, u_c é escolhido, isto é, pelo menos uma das extremidades é um vértice escolhido. Desse modo, os vértices escolhidos formam uma cobertura de vértices de tamanho k para G .

Suponha que temos uma cobertura C , com tamanho $k \leq v + 2c$, para o grafo G (construído a partir de ϕ). Veja que necessariamente temos que qualquer cobertura de vértice C' de G deve cobrir cada aresta criada em (a) com pelo menos um vértice e cada aresta dos ciclos criados (b) com pelo menos dois vértices. Isso implica que cada cobertura de vértices de G deve possuir tamanho pelo menos $v + 2c$. Logo $v + 2c \leq |C| = k \leq v + 2c$ e, portanto, $|C| = v + 2c$. Como temos $v + 2c$ vértices em C necessariamente temos que C possui exatamente um vértice para cada estrutura criada em (a) e exatamente dois vértices para cada estrutura criada em (b). Para os vértices de C que foram criados em (a), dê a valoração ao seu literal correspondente como V e o seu literal oposto como F. Como temos que, para cada cláusula, existe um vértice cláusula que não está na cobertura e a aresta criada em (c) que sai dele está coberta pelo vértice variável (para o qual valoramos seu literal como V), então cada cláusula possui pelo menos um literal V. Portanto, essa valoração satisfaz ϕ . Utilizando o Teorema B.3, concluímos nosso resultado. \square

Complexidade de Espaço

Além da complexidade de tempo, existe também a complexidade de espaço, análoga para células de memória necessárias em um algoritmo em vez do tempo de execução. Similarmente às classes P, NP, NP-difícil e NP-completa, existem as classes PSPACE, NPSpace, PSPACE-difícil e PSPACE-completa. Contudo, na complexidade de espaço, PSPACE = NPSpace pelo Teorema de Savitch. Sabe-se também que $P \subseteq NP \subseteq PSPACE$.

O primeiro problema provado PSPACE-completo foi QSAT (SAT quantificado) por Stockmeyer e Meyer (1973), definido a seguir. É dada uma fórmula lógica com variáveis de modo que toda variável está quantificada com \exists (existe) ou \forall (para todo) no início da fórmula. O objetivo é decidir se a fórmula é verdadeira ou falsa. Por exemplo, a fórmula $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$ é falsa, pois tomando x_1 falso, a fórmula será sempre falsa, independente do valor de x_2 . Por outro lado, a fórmula $\exists x_1 \forall x_2 (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)$ é verdadeira, pois tomando x_1 verdadeiro, a fórmula será sempre verdadeira, independente do valor de x_2 .

QSAT pode ser visto como um jogo de dois jogadores, Alice e Bob, que atribuem valores segundo a ordem da quantificação da fórmula. Alice (resp. Bob) só pode atribuir valores a variáveis quantificadas com \exists (resp. \forall). Alice vence se tornar a fórmula verdadeira, e Bob vence se tornar a fórmula falsa.

Após a prova da PSPACE-completude de QSAT, vários outros problemas foram provados PSPACE-completos, vários deles voltados para jogos com dois jogadores. Um dos mais antigos, por exemplo, é o jogo Node-Kayles em que dois jogadores alternam jogadas selecionando vértices de um grafo de modo que os vértices selecionados induzem um conjunto independente no grafo. O último jogador a conseguir jogar vence o jogo (obtendo um conjunto independente maximal). No jogo de formação de cliques, os vértices devem formar uma clique, ao invés de um conjunto independente. Sabe-se que os problemas de decidir qual jogador possui uma estratégia vencedora no Node-Kayles e no jogo de formação de cliques são PSPACE-completos (Schaefer 1978).

Complexidade de Aproximação

Um *problema de otimização* é um problema que, dada uma instância, deseja obter uma solução de um problema sobre a instância cujo valor é ótimo (mínimo ou máximo). Ou seja, todo problema de otimização P tem um tipo: minimização ou maximização. Além disso, toda instância I de P tem um conjunto $\text{Sol}_P(I)$ das soluções e cada solução $s \in \text{Sol}_P(I)$ tem um valor $\text{val}_P(s, I)$. As instâncias consideradas têm sempre $\text{Sol}_P(I) \neq \emptyset$, ou seja, são instâncias viáveis. *Solução ótima* significa uma solução com valor mínimo (resp. máximo) em problemas de minimização (resp. maximização).

Dado um problema de otimização P e uma instância I , seja $\text{opt}_P(I)$ o valor de uma solução ótima. Segundo Ausiello et al. (1999), a *razão de aproximação* $\mathcal{R}_P(s, I)$ de uma solução s de I é definida como

$$\mathcal{R}_P(s, I) = \max \left\{ \frac{\text{opt}_P(I)}{\text{val}_P(s, I)}, \frac{\text{val}_P(s, I)}{\text{opt}_P(I)} \right\} \geq 1.$$

Dada uma função $r(n) \geq 1$, um *algoritmo $r(n)$ -aproximativo* para um problema de otimização P é um algoritmo que, aplicado a qualquer instância I de P , produz uma solução s de I tal que $\mathcal{R}_P(s, I) \leq r(n)$, em que n é o tamanho da instância I . Dizemos que um problema é *$r(n)$ -inaproximável* se não tem algoritmo polinomial $r(n)$ -aproximativo a menos que $P = \text{NP}$. Dizemos também que um problema de otimização é APX, Log-APX ou Poly-APX se tem algoritmo $r(n)$ -aproximativo polinomial para alguma função $r(n) = k$, $r(n) = O(\log n)$ ou $r(n) = O(n^k)$ respectivamente, sendo k uma constante.

Dados problemas de otimização P_1 e P_2 , uma redução de P_1 para P_2 é um par (f, g) tal que, para todo racional fixo $r \geq 1$ e toda instância I de P_1 , (a) $f_r(I)$ é uma instância de P_2 computável em tempo polinomial e, para toda solução s de $f_r(I)$, (b) $g_r(I, S)$ é uma solução de I computável em tempo polinomial.

Segundo Ausiello et al. (ibid.), P_1 tem uma *redução AP* para P_2 (*approximation preserving* $P_1 \leq_{AP} P_2$) se existe uma redução (f, g) de P_1 para P_2 e existe uma constante positiva γ , tais que se $\mathcal{R}_{P_2}(s, f_r(I)) \leq r$, então $\mathcal{R}_{P_1}(g_r(s), I) \leq 1 + \gamma(r - 1)$ para todo racional $r \geq 1$, toda instância I de P_1 e toda solução s de $f_r(I)$.

Dizemos que um problema de otimização P_2 é Poly-APX-difícil se $P_1 \leq_{AP} P_2$ para todo problema P_1 que é Poly-APX e dizemos que P_2 é Poly-APX-completo se é Poly-

APX e Poly-APX-difícil. Define-se analogamente APX-difícil, APX-completo, Log-APX-difícil e Log-APX-completo. Sabe-se, por exemplo, que o problema do *Conjunto Dominante Mínimo* é Log-APX-completo e que o problema da *Clique Máxima* é Poly-APX-completo (Escoffier e Paschos 2006).

Complexidade Parametrizada

Com a motivação para tratar problemas NP-difíceis e classificá-los quanto ao grau de dificuldade de resolução, Downey e Fellows introduziram a Teoria da Complexidade Parametrizada. Recomenda-se o livro *Parameterized Complexity* de Downey e Fellows (2012).

Seguimos abaixo as notações do livro *Parameterized Complexity Theory* de Flum e Grohe (2006). Um *parâmetro* k para um problema computacional Q é uma função que atribui um número natural $k(x)$ para cada instância x do problema Q . Quando a instância x do problema estiver clara no contexto, podemos escrever simplesmente k ao invés de $k(x)$. Um *problema parametrizado* é um par (Q, k) , sendo Q é um problema de decisão e k um parâmetro do problema Q . Abaixo mostramos alguns exemplos de problemas parametrizados.

No problema parametrizado 3-COLORAÇÃO(Δ), a instância é um grafo G , o parâmetro é $\Delta(G)$ (grau máximo de G) e a pergunta é se existe uma coloração própria de vértices de G usando no máximo 3 cores. No problema parametrizado COBERTURA DE VÉRTICES(k), a instância é um grafo G e um inteiro k , o parâmetro é k e a pergunta é se existe $S \subseteq V(G)$, com $|S| \leq k$, em que cada aresta de G tem uma extremidade em S . No problema parametrizado CLIQUE(k), a instância é um grafo G e um inteiro k , o parâmetro é k e a pergunta é se existe $S \subseteq V(G)$, com $|S| \leq k$, em que todos os vértices de S são adjacentes entre si. No problema parametrizado DOMINANTE(k), a instância é um grafo G e um inteiro k , o parâmetro é k e a pergunta é se existe $S \subseteq V(G)$, com $|S| \leq k$, em que cada vértice de $G - S$ possui um vizinho em S .

Também é possível parametrizar em um número constante de parâmetros, k_1, k_2, \dots, k_c . Nesse caso, considera-se que o parâmetro k do problema parametrizado é a soma $k = k_1 + \dots + k_c$. Um exemplo é o problema DOMINANTE(Δ, k) que tem a mesma instância e a mesma pergunta de DOMINANTE(k), mas é parametrizado por $\Delta(G)$ e k , ou seja, tem $\Delta(G) + k$ como parâmetro.

Dado um problema computacional Q , um *algoritmo* XP em um parâmetro k de Q é um algoritmo que executa em tempo $O(f(k) \cdot n^{g(k)})$, em que n é o tamanho da instância de Q , k é o parâmetro e f e g são funções computáveis. Define-se a *Classe* XP como o conjunto dos problemas parametrizados que têm algoritmos XP. Essa classe contém os problemas parametrizados que admitem algoritmo polinomial no tamanho da instância quando os parâmetros são fixos.

Dado um problema computacional Q , um *algoritmo* FPT (tratável por parâmetro fixo) com relação a um parâmetro k do problema Q é um algoritmo que executa em tempo $O(f(k) \cdot n^{O(1)})$, em que k é o parâmetro, n o tamanho da representação da instância do problema parametrizado e f uma função computável. Define-se a *Classe* FPT como o

conjunto dos problemas parametrizados que possuem algoritmos FPT.

Temos o análogo da redução polinomial da Teoria da Complexidade Clássica. Sejam (Q, k) e (Q', k') dois problemas parametrizados. Uma *redução* FPT de (Q, k) para (Q', k') (denotada por $(Q, k) \leq_{\text{FPT}} (Q', k')$) é um algoritmo R que, para toda instância x de Q , produz uma instância $x' = R(x)$ de Q' tal que (a) x é SIM em Q se, e somente se, x' é SIM em Q' , (b) existe uma função computável g tal que $k'(x') \leq g(k(x))$ para toda instância x de Q e (c) R é computável por um algoritmo FPT (com relação ao parâmetro k).

Lema B.1 (Preservação da tratabilidade por parâmetro fixo).

Se $(Q, k) \leq_{\text{FPT}} (Q', k')$ e $(Q', k') \in \text{FPT}$, então $(Q, k) \in \text{FPT}$.

Duas classes importantes de problemas parametrizados são as *Classes* $W[1]$ e $W[2]$. A definição original dessas classes depende da definição de circuitos booleanos e, para isso, são necessárias várias notações adicionais, que deixaremos para a subseção seguinte. Fornecemos a princípio definições mais simples equivalentes (como em (ibid.)). Seja $W[1]$ a classe dos problemas parametrizados que possuem uma redução FPT para o problema $\text{CLIQUE}(k)$. Seja $W[2]$ a classe dos problemas parametrizados que possuem uma redução FPT para o problema $\text{DOMINANTE}(k)$.

Assim como $P \subseteq NP$ na Complexidade Clássica, temos que $\text{FPT} \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \text{XP}$ na Complexidade Parametrizada.

Para $t \in \{1, 2\}$, dizemos que um problema parametrizado (Q', k') é $W[t]$ -difícil se para todo problema $(Q, k) \in W[t]$, temos que $(Q, k) \leq_{\text{FPT}} (Q', k')$. Além disso, (Q', k') é $W[t]$ -completo se é $W[t]$ e $W[t]$ -difícil.

Assim como há a conjectura $P \neq NP$ na Teoria da Complexidade clássica, também existe a conjectura $\text{FPT} \neq W[1] \neq W[2]$ na Complexidade Parametrizada. Sabe-se que, se um problema $W[1]$ -completo estiver em FPT, então $\text{FPT} = W[1]$ e, se um problema $W[2]$ -completo estiver em $W[1]$, então $W[1] = W[2]$. Sabe-se ainda que $\text{COBERTURA DE VÉRTICES}(k)$ pertence a FPT e que, pela definição dada acima das Classes $W[1]$ e $W[2]$, o problema $\text{CLIQUE}(k)$ é $W[1]$ -completo e o problema $\text{DOMINANTE}(k)$ é $W[2]$ -completo.

Hierarquia W

Para fornecer a definição original das Classes $W[1]$ e $W[2]$, mencionadas na seção anterior, é preciso antes definir *circuito booleano*, que é um grafo direcionado acíclico no qual os vértices são rotulados do seguinte modo: (a) todo vértice com grau de entrada 0 é um *nó de entrada*, (b) todo vértice com grau de entrada 1 é um *nó de negação* e (c) todo vértice com grau de entrada pelo menos 2 é um *nó de conjunção* ou *de disjunção*. Os termos negação, conjunção e disjunção estão associados aos operadores lógicos clássicos \neg , \wedge e \vee respectivamente. Além disso, existe apenas um vértice com grau de saída 0 que também é rotulado como *nó de saída*. Dizemos que um *nó* é *grande* se tem grau de entrada pelo menos 3, ou seja, só pode ser de conjunção ou disjunção.

Por simplicidade, como o circuito booleano é acíclico, costuma-se representá-lo sem as orientações das arestas, assumindo o sentido natural dos nós de entrada para o nó de

saída, de cima para baixo, como exemplifica a Figura B.2.

A *profundidade* (*depth*) de um circuito booleano é o tamanho máximo de um caminho de um nó de entrada para o nó de saída. O *entrelaçamento* (*weft*) de um circuito booleano é o número máximo de nós grandes em um caminho de um nó de entrada para o nó de saída.

Associar valores 0-1 (verdadeiro-falso) aos nós de entrada determina o valor de cada nó do circuito da maneira esperada, aplicando os operadores lógicos. Com o termo atribuição, estaremos nos referindo a uma atribuição de valores 0-1 aos nós de entrada de um circuito booleano dado. Dizemos que uma atribuição satisfaz o circuito booleano se o valor do nó de saída é 1.

As Figuras B.2 (b) e (c) mostram circuitos booleanos associados aos problemas de conjunto independente e conjunto dominante do grafo G da Figura B.2 (a) respectivamente. Na Figura B.2 (b), cada vértice preto é ligado a apenas um vértice ‘ \neg ’ e ambos são referentes a um vértice de G , enquanto cada vértice ‘ \vee ’ é referente a uma aresta de G , sendo ligado aos dois vértices ‘ \neg ’ referentes a suas extremidades; e o vértice ‘ \wedge ’ é ligado aos vértices ‘ \vee ’. Note na Figura B.2 (b) que se tomarmos os vértices a e b como 1 (verdadeiro), o primeiro vértice ‘ \vee ’ (da esquerda pra direita) será 0 (falso) e, logo, o vértice de saída ‘ \wedge ’ será 0. Como isso ocorre para cada par vértices adjacentes de G , então, para o vértice de saída ser 1, todos os vértices de entrada com 1 devem ser correspondentes a um conjunto independente em G . Para obter um circuito booleano para o problema $\text{CLIQUE}(k)$, basta tomar o circuito do conjunto independente relacionado ao complemento do grafo G da Figura B.2 (a). Já na Figura B.2 (c) cada vértice preto corresponde a um vértice de G , os vértices ‘ \vee ’ correspondem à vizinhança fechada de um vértice de G e o vértice ‘ \wedge ’ é ligado aos vértices ‘ \vee ’. Para termos 0 no vértice de saída no circuito da Figura B.2 (c), então pelo menos um vértice ‘ \vee ’ deverá ter todos seus vértices de entrada 0, isto é, deverá existir uma vizinhança fechada de algum vértice de G com todos seus vértices 0. Deste modo, para haver 1 no vértice de saída, deve haver pelo menos um vértice de entrada 1 na vizinhança fechada de cada vértice de G , ou seja, esses vértices de entrada 1 formam um conjunto dominante de G .

Decidir se um circuito booleano é satisfatível, ou seja, se existe uma atribuição que o satisfaz, é um problema NP-completo, pois o Problema 3SAT é um caso particular: toda instância do 3SAT pode ser representada em um circuito booleano de profundidade ≤ 3 e entrelaçamento ≤ 2 (conjunção de disjunções).

Seja WCD (*Weighted Circuit Satisfiability*) o problema de decidir se, dado um circuito booleano C e um inteiro k , existe uma atribuição que satisfaça C com exatamente k valores iguais a 1. Seja $W[t]$, para $t \geq 1$ inteiro, a classe dos problemas parametrizados que admitem uma redução FPT para o problema WCD restrito a circuitos com entrelaçamento t , parametrizado por k (número de valores 1 nos nós de entrada). Note que $W[t] \subseteq W[t + 1]$ para todo $t \geq 1$.

Os circuitos booleanos da Figura B.2 mostram que é possível representar o problema do Conjunto Independente (consequentemente o problema $\text{CLIQUE}(k)$) em circuitos booleanos com entrelaçamento 1 e o problema $\text{DOMINANTE}(k)$ em circuitos com entrelaçamento 2. Ou seja, $\text{CLIQUE}(k)$ e $\text{DOMINANTE}(k)$ estão em $W[1]$ e em $W[2]$ respectivamente.

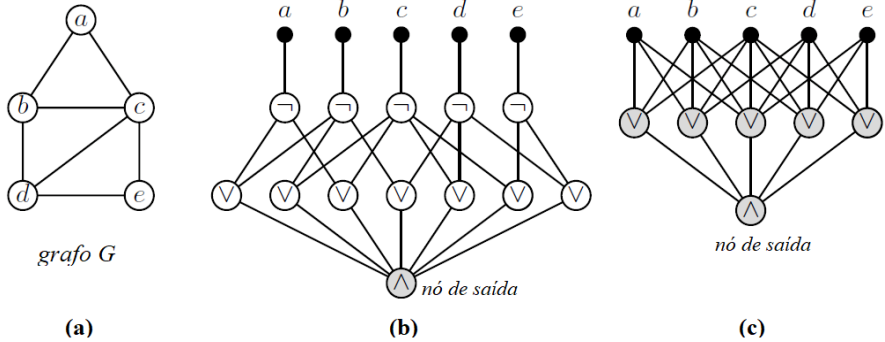


Figura B.2: Exemplos de circuitos booleanos para decidir se um conjunto de vértices é independente ou dominante em um grafo G . Nós grandes (que entram na contagem do entrelaçamento) estão em cinza: (a) Grafo G com 5 vértices e 7 arestas; (b) Circuito booleano de profundidade 3 e entrelaçamento 1, só satisfeito por *conjuntos independentes* de G (cada nó de disjunção corresponde a uma aresta de G e tem grau de entrada 2); (c) Circuito de profundidade 2 e entrelaçamento 2, só satisfeito por *conjuntos dominantes* de G (cada nó de disjunção corresponde à vizinhança fechada de um vértice de G).

Sabe-se que $\text{CLIQUE}(k)$ é $W[1]$ -difícil (todo problema em $W[1]$ tem redução FPT para ele), e que $\text{DOMINANTE}(k)$ é $W[2]$ -difícil (todo problema em $W[2]$ possui uma redução FPT para ele).

Bibliografia

- M. Albenque e K. Knauer (2016). “Convexity in partial cubes: The hull number”. *Discrete Mathematics* 339.2, pp. 866–876. MR: 3431401. Zbl: 1327 . 05086 (ver pp. 76, 106).
- L. Alcón, B. Brešar, T. Gologranc, M. Gutierrez, T. Kraner Šumenjak, I. Peterin e A. Tepeh (2015). “Toll convexity”. *European Journal of Combinatorics* 46, pp. 161–175. MR: 3305352. Zbl: 1307 . 05123 (ver pp. 46–48, 50).
- “Amusements in Mathematics” (1917). *Nature* 100, pp. 302–303 (ver pp. 8, 29).
- B. S. Anand, U. Chandran S. V., M. Changat, M. C. Dourado, F. Hossein Nezhad e P. G. Narasimha-Shenoi (2020). “On the Carathéodory and exchange numbers of geodetic convexity in graphs”. *Theoretical Computer Science* 804, pp. 46–57. MR: 4044813. Zbl: 1442 . 05040 (ver p. 85).
- B. S. Anand, U. Chandran S. V., M. Changat, S. Klavžar e E. J. Thomas (2019). “Characterization of general position sets and its applications to cographs and bipartite graphs”. *Applied Mathematics and Computation* 359, pp. 84–89. MR: 3948765. Zbl: 1428 . 05078 (ver pp. 29, 30).
- M. Aouchiche e P. Hansen (2013). “A survey of Nordhaus–Gaddum type relations”. *Discrete Applied Mathematics* 161.4, pp. 466–546. MR: 3015299. Zbl: 1259 . 05083 (ver p. 83).
- J. Araújo e P. S. M. Arraes (2022). “Hull and geodetic numbers for some classes of oriented graphs”. *Discrete Applied Mathematics* 323, pp. 14–27. MR: 4503012. Zbl: 1502 . 05081 (ver pp. 106–108).
- J. Araújo, V. Campos, F. Giroire, N. Nisse, L. Sampaio e R. Soares (2013). “On the hull number of some graph classes”. *Theoretical Computer Science* 475, pp. 1–12. MR: 3018479. Zbl: 1419 . 05049 (ver pp. 70, 76, 77, 84).
- J. Araújo, M. C. Dourado, F. Protti e R. M. Sampaio (2023). “The iteration time and the general position number in graph convexities”. arXiv: 2305 . 00467 (ver pp. 24, 29, 57, 58).

- J. Araújo, A. K. Maia, P. P. Medeiros e L. D. Penso (2023). “On the hull and interval numbers of oriented graphs”. arXiv: 2210.01598 (ver p. 109).
- R. T. Araújo e R. M. Sampaio (2023). “Domination and convexity problems in the target set selection model”. *Discrete Applied Mathematics* 330, pp. 14–23. MR: 4530761. Zbl: 07662539 (ver p. 111).
- R. T. Araújo, R. M. Sampaio, V. F. dos Santos e J. L. Szwarcfiter (2018). “The convexity of induced paths of order three and applications: Complexity aspects”. *Discrete Applied Mathematics* 237, pp. 33–42. MR: 3763295. Zbl: 1380.05031 (ver p. 20).
- R. T. Araújo, R. M. Sampaio e J. L. Szwarcfiter (2013). “The convexity of induced paths of order three”. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 44, pp. 109–114 (ver pp. 15, 16, 57, 58).
- S. N. Araújo, R. Folz, R. de Freitas e R. M. Sampaio (2023). “Complexity and winning strategies of graph convexity games”. Submetido (ver pp. 116–121).
- G. Ausiello, M. Protasi, A. Marchetti-Spaccamela, G. Gambosi, P. Crescenzi e V. Kann (1999). *Complexity and Approximation: Combinatorial Optim Problems and Their Approximability Properties*. Springer, pp. xx+524. MR: 1734026. Zbl: 0937.68002 (ver p. 135).
- H.-J. Bandelt (1989). “Graphs with intrinsic S_3 convexities”. *Journal of Graph Theory* 13:2, pp. 215–228. MR: 0994743 (ver p. 93).
- H.-J. Bandelt e V. Chepoi (1996). “A Helly theorem in weakly modular space”. *Discrete Mathematics* 160.1, pp. 25–39. MR: 1417558. Zbl: 0864.05049 (ver p. 86).
- H.-J. Bandelt e H. M. Mulder (1990). “Helly Theorems for Dismantlable Graphs and Pseudo-Modular Graphs”. Em: *Topics in Combinatorics and Graph Theory: Essays in Honour of Gerhard Ringel*. Ed. por R. Bodendiek e R. Henn. Heidelberg: Physica-Verlag HD, pp. 65–71. MR: 1100022. Zbl: 0697.05034 (ver p. 86).
- I. Bárány (2021). *Combinatorial convexity*. Vol. 77. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. viii+148. MR: 4390801 (ver pp. 2, 7).
- R. M. Barbosa, E. M. M. Coelho, M. C. Dourado, D. Rautenbach e J. L. Szwarcfiter (2012). “On the Carathéodory number for the convexity of paths of order three”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 26.3, pp. 929–939. MR: 3022115. Zbl: 1256.05240 (ver p. 57).
- C. Bazgan, M. Chopin, A. Nichterlein e F. Sikora (2014). “Parameterized inapproximability of target set selection and generalizations”. *Computability* 3, pp. 135–145. MR: 3281429. Zbl: 1320.68088 (ver p. 111).
- O. Ben-Zwi, D. Hermelin, D. Lokshtanov e I. Newman (2011). “Treewidth governs the complexity of target set selection”. *Discrete Optimization* 8, pp. 87–96. MR: 2772563. Zbl: 1248.90068 (ver p. 111).
- F. Benevides, V. Campos, M. C. Dourado, R. M. Sampaio e A. Silva (2015). “The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: Algorithmic aspects”. *European Journal of Combinatorics* 48, pp. 88–99. MR: 3339015. Zbl: 1314.05195 (ver pp. 24, 60, 63, 64).
- F. Benevides, V. Campos, M. C. Dourado, R. M. Sampaio e A. Silva (2016). “The maximum infection time in the geodesic and monophonic convexities”. *Theoretical Com-*

- puter Science* 609, pp. 287–295. MR: 3426958. Zbl: 1331 . 05201 (ver pp. 24, 87, 89).
- F. Benevides e M. Przykucki (2013). “On slowly percolating sets of minimal size in bootstrap percolation”. *Electronic Journal of Combinatorics* 20.2, artigo P46. MR: 3084588. Zbl: 1298 . 05297 (ver pp. 24, 87).
- C. Berge e P. Duchet (1975). “Une généralisation du théorème de Gilmore”. *Cahiers du Centre d’études de recherche opérationnelle* 17, pp. 117–123. MR: 0396277 (ver pp. 7, 28).
- J. A. Bondy e U. S. R. Murty (2008). *Graph Theory*. Springer London, pp. xii+663. MR: 2368647. Zbl: 1134 . 05001 (ver p. 95).
- A. Brandstädt, V. B. Le e J. P. Spinrad (1999). *Graph Classes: A Survey*. SIAM, pp. xi+295. MR: 1686154. Zbl: 0919 . 05001 (ver p. 43).
- V. W. Bryant, J. E. Dawson e H. Perfect (1978). “Hereditary circuit spaces”. *Compositio Mathematica* 37.3, pp. 339–351. MR: 0511749. Zbl: 0399 . 05016 (ver p. 26).
- F. Buckley e F. Harary (1985a). “Closed geodetic games for graphs”. *Congressus Numerantium* 47. Proc. of 16th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, pp. 131–138. MR: 0830675. Zbl: 0635 . 90102 (ver pp. 114, 117).
- (1985b). “Geodetic games for graphs”. *Quaestiones Mathematicae* 8, pp. 321–334. MR: 0854054. Zbl: 0615 . 90093 (ver pp. 113, 114).
- L. R. Bueno, L. D. Penso, F. Protti, V. R. Ramos, D. Rautenbach e U. S. Souza (2018). “On the hardness of finding the geodetic number of a subcubic graph”. *Information Processing Letters* 135, pp. 22–27. MR: 3779970. Zbl: 1476 . 05041 (ver p. 72).
- J. Cáceres, A. Márquez e M. L. Puertas (2008). “Steiner distance and convexity in graphs”. *European Journal of Combinatorics* 29.3, pp. 726–736. MR: 2397352. Zbl: 1142 . 05021 (ver pp. 12, 97).
- J. R. Calder (1971). “Some Elementary Properties of Interval Convexities”. *Journal of the London Mathematical Society* s2-3.3, pp. 422–428. MR: 0288664. Zbl: 0228 . 52001 (ver pp. 7, 12, 28).
- V. Campos, R. M. Sampaio, A. Silva e J. L. Szwarcfiter (2015). “Graphs with few P4’s under the convexity of paths of order three”. *Discrete Applied Mathematics* 192, pp. 28–39. MR: 3354816. Zbl: 1319 . 05077 (ver p. 60).
- S. R. Canoy Jr. e I. J. L. Garces (2002). “Convex sets under some graph operations”. *Graphs and Combinatorics* 18.4, pp. 787–793. MR: 1964797. Zbl: 1009 . 05054 (ver p. 83).
- M. R. Cappelle, E. M. M. Coelho, H. Coelho, B. R. Silva, U. S. Souza e F. Protti (2022). “P3-convexity on graphs with diameter two: Computing hull and interval numbers”. *Discrete Applied Mathematics* 321, pp. 368–378. MR: 4463001. Zbl: 1497 . 05051 (ver p. 60).
- C. Carathéodory (1911). “Über den variabilitätsbereich der fourier’schen konstanten von positiven harmonischen funktionen”. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Series I* 32.1, pp. 193–217 (ver pp. 2, 5, 26).
- M. T. Carvalho (2016). “O Número de Helly na Convexidade Geodética em Grafos”. Tese de dout. Universidade Federal do Rio de Janeiro (ver pp. 28, 87).

- D. Castonguay, E. M. M. Coelho, H. Coelho e J. R. Nascimento (2019). “A note on the convexity number for complementary prisms”. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 21. MR: 3995588. Zbl: 1417.05045 (ver p. 83).
- C. C. Centeno, M. C. Dourado, L. D. Penso, D. Rautenbach e J. L. Szwarcfiter (2011). “Irreversible conversion of graphs”. *Theoretical Computer Science* 412.29, pp. 3693–3700. MR: 2839698. Zbl: 1220.05109 (ver p. 110).
- C. C. Centeno, M. C. Dourado e J. L. Szwarcfiter (2009). “On the Convexity of Paths of Length Two in Undirected Graphs”. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 32. DIMAP Workshop on Algorithmic Graph Theory, pp. 11–18. MR: 2574589. Zbl: 1267.05248 (ver pp. 15, 57).
- V. D. Cepoi (1986). “Some properties of d -convexity in triangulated graphs (in Russian)”. *Matematicheskie issledovanija* 87, pp. 164–177. MR: 871184 (ver p. 86).
- D. Chakraborty, S. Das, F. Foucaud, H. Gahlawat, D. Lajou e B. Roy (2020). “Algorithms and complexity for geodetic sets on planar and chordal graphs”. Em: *ISAAC 2020*. LIPIcs, 7:1–7:15. MR: 4189451 (ver pp. 72, 74).
- D. Chakraborty, F. Foucaud, H. Gahlawat, S. K. Ghosh e B. Roy (2020). “Hardness and Approximation for the Geodetic Set Problem in Some Graph Classes”. Em: *Algorithms and discrete applied mathematics. 6th international conference, CALDAM 2020, Hyderabad, India, February 13–15, 2020*. Ed. por M. Changat e S. Das. Vol. 12016. Lecture Notes in Computer Science. Springer, pp. 102–115. MR: 4074901. Zbl: 1453.68127 (ver p. 72).
- J. Chalupa, P. L. Leath e G. R. Reich (1979). “Bootstrap percolation on a Bethe lattice”. *Journal of Physics C: Solid State Physics* 12.1, pp. 31–35 (ver pp. 110, 111).
- U. Chandran S. V., S. Klavžar, Neethu P. K. e R. M. Sampaio (2023). “The general position avoidance game and hardness of general position games”. A ser publicado em *Theoretical Computer Science*. arXiv: 2205.03526 (ver pp. 114–116).
- G. J. Chang, L.-D. Tong e H.-T. Wang (2004). “Geodetic spectra of graphs”. *European Journal of Combinatorics* 25.3, pp. 383–391. MR: 2036475. Zbl: 1034.05018 (ver pp. 103, 104).
- M. Changat, S. Klavzar e H. M. Mulder (2001). “The All-Paths Transit Function of a Graph”. *Czechoslovak Mathematical Journal* 51.2, pp. 439–448. MR: 1844322. Zbl: 0977.05135 (ver p. 94).
- M. Changat e J. Mathews (1999). “On triangle path convexity in graphs”. *Discrete Mathematics* 206, pp. 91–95. MR: 1665388. Zbl: 0929.05046 (ver pp. 15, 41, 93).
- M. Changat, H. M. Mulder e G. Sierksma (2005). “Convexities related to path properties on graphs”. *Discrete Mathematics* 290:2–3, pp. 117–131. MR: 2123384. Zbl: 1058.05043 (ver p. 93).
- M. Changat, G. N. Prasanth e J. Mathews (2009). “Triangle path transit functions, betweenness and pseudo-modular graphs”. *Discrete Mathematics* 309:6, pp. 1575–1583. MR: 2510564. Zbl: 1228.05190 (ver p. 93).
- G. Chartrand, J. F. Fink e P. Zhang (2002). “Convexity in oriented graphs”. *Discrete Applied Mathematics* 116.1-2, pp. 115–126. MR: 1877118. Zbl: 1001.05050 (ver p. 100).

- (2003). “The hull number of an oriented graph”. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2003.36, pp. 2265–2275. MR: 1995486. Zbl: 1027.05034 (ver pp. 98, 101–105).
- G. Chartrand, F. Harary e P. Zhang (2000). “On the Hull Number of a Graph”. *Ars Combinatoria* 57, pp. 129–138. MR: 1796634. Zbl: 1064.05049 (ver p. 70).
- (2002). “On the geodetic number of a graph”. *Networks* 39.1, pp. 1–6. MR: 1871701. Zbl: 0987.05047 (ver p. 69).
- G. Chartrand, C. E. Wall e P. Zhang (2002). “The Convexity Number of a Graph”. *Graphs and Combinatorics* 18.2, pp. 209–217. MR: 1913663. Zbl: 1002.05018 (ver pp. 23, 78).
- G. Chartrand e P. Zhang (1999). “Convex sets in graphs”. *Congressus Numerantium*, pp. 19–32. MR: 1744171. Zbl: 0967.05031 (ver p. 83).
- (2000). “The geodetic number of an oriented graph”. *European Journal of Combinatorics* 21.2, pp. 181–189. MR: 1742433. Zbl: 0941.05033 (ver pp. 98, 101–103, 105).
- N. Chen (2009). “On the Approximability of Influence in Social Networks”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 23.3, pp. 1400–1415. MR: 2556537. Zbl: 1203.68314 (ver pp. 16, 56, 110, 111).
- M. Chopin, A. Nichterlein, R. Niedermeier e M. Weller (2014). “Constant thresholds can make target set selection tractable”. *Theory of Computing Systems* 55.1, pp. 61–83. MR: 3212885. Zbl: 1319.68109 (ver p. 111).
- F. Cicalese, G. Cordasco, L. Gargano, M. Milanič e U. Vaccaro (2014). “Latency-bounded target set selection in social networks”. *Theoretical Computer Science* 535, pp. 1–15. MR: 3197779. Zbl: 1358.05272 (ver p. 111).
- F. Cicalese, M. Milanič e U. Vaccaro (2013). “On the approximability and exact algorithms for vector domination and related problems in graphs”. *Discrete Applied Mathematics* 161.6, pp. 750–767. MR: 3027964. Zbl: 1262.05116 (ver p. 111).
- E. M. M. Coelho, H. Coelho, J. R. Nascimento e J. L. Szwarcfiter (2022). “A polynomial time algorithm for geodetic hull number for complementary prisms”. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications* 56, 1, pp. 1–11. MR: 4376269. Zbl: 1483.05046 (ver p. 78).
- E. M. M. Coelho, M. C. Dourado, D. Rautenbach e J. L. Szwarcfiter (2014). “The Carathéodory number of the P_3 convexity of chordal graphs”. *Discrete Applied Mathematics* 172, pp. 104–108. MR: 3197266. Zbl: 1288.05050 (ver p. 60).
- E. M. M. Coelho, M. C. Dourado e R. M. Sampaio (2015). “Inapproximability results for graph convexity parameters”. *Theoretical Computer Science* 600, pp. 49–58. MR: 3394673. Zbl: 1329.68122 (ver pp. 23, 25, 59, 78).
- D. G. Corneil, H. Lerchs e L. S. Burlingham (1981). “Complement reducible graphs”. *Discrete Applied Mathematics* 3.3, pp. 163–174. MR: 0619603. Zbl: 0463.05057 (ver p. 75).
- E. R. Costa, M. C. Dourado e R. M. Sampaio (2015). “Inapproximability results related to monophonic convexity”. *Discrete Applied Mathematics* 197. Distance Geometry and Applications, pp. 70–74. MR: 3398962. Zbl: 1321.05128 (ver p. 89).

- E. R. Costa, V. L. Pessoa, R. M. Sampaio e R. Soares (2020). “PSPACE-completeness of two graph coloring games”. *Theoretical Computer Science* 824-825, pp. 36–45. MR: 4096286. Zbl: 1442.68063 (ver p. 117).
- A. R. da Silva (2014). “O número de Helly na convexidade geodética: contribuições teóricas e práticas”. Diss. de mest. Universidade Federal do Rio de Janeiro (ver p. 87).
- L. Dong, C. Lu e X. Wang (2009). “The Upper and Lower Geodetic Numbers of Graphs”. *Ars Combinatoria* 91. MR: 2501979. Zbl: 1224.05137 (ver p. 105).
- M. C. Dourado e A. R. da Silva (2017). “Inapproximability results and bounds for the Helly and Radon numbers of a graph”. *Discrete Applied Mathematics* 232, pp. 134–141. MR: 3711953. Zbl: 1372.05051 (ver pp. 25, 57, 59, 86, 87).
- M. C. Dourado, J. G. Gimbel, J. Kratochvíl, F. Protti e J. L. Szwarcfiter (2009). “On the computation of the hull number of a graph”. *Discrete Mathematics* 309.18. *Combinatorics 2006, A Meeting in Celebration of Pavol Hell’s 60th Birthday (May 1–5, 2006)*, pp. 5668–5674. MR: 2567969. Zbl: 1215.05184 (ver pp. 68, 76–78, 107).
- M. C. Dourado, M. Gutierrez, F. Protti, R. M. Sampaio e S. Tondato (2022). “Characterizations of graph classes via convex geometries: A survey”. arXiv: 2203.15878 (ver pp. 41, 42, 51).
- M. C. Dourado, R. A. Oliveira e F. Protti (2014). “Algorithmic aspects of Steiner convexity and enumeration of Steiner trees”. *Annals of Operations Research* 223.1, pp. 155–171. MR: 3277229. Zbl: 1332.90326 (ver p. 97).
- M. C. Dourado, R. A. Oliveira, F. Protti e D. Rautenbach (2016). “On the geodetic iteration number of distance-hereditary graphs”. *Discrete Mathematics* 339.2, pp. 489–498. MR: 3431359. Zbl: 1327.05089 (ver pp. 24, 87).
- M. C. Dourado, L. D. Penso e D. Rautenbach (2016). “On the geodetic hull number of Pk-free graphs”. *Theoretical Computer Science* 640, pp. 52–60. MR: 3516810. Zbl: 1345.05017 (ver pp. 72, 76, 77).
- (2017). “Geodetic convexity parameters for $(q, q-4)$ -graphs”. *Discrete Applied Mathematics* 223, pp. 64–71. MR: 3627300. Zbl: 1464.05333 (ver pp. 83, 85, 86).
- (2022). “The hull number in the convexity of induced paths of order 3”. *Theoretical Computer Science* 906, pp. 52–63. MR: 4377210. Zbl: 07477132 (ver p. 60).
- M. C. Dourado, V. S. Ponciano e R. L. O. da Silva (2022). “On the monophonic rank of a graph”. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 24.2. arXiv: 2010.01365 (ver pp. 90, 91).
- M. C. Dourado, F. Protti, D. Rautenbach e J. L. Szwarcfiter (2010a). “On the Hull Number of Triangle-Free Graphs”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 23.4, pp. 2163–2172. MR: 2594978. Zbl: 1207.05044 (ver p. 70).
- (2010b). “Some remarks on the geodetic number of a graph”. *Discrete Mathematics* 310.4, pp. 832–837. MR: 2574832. Zbl: 1209.05129 (ver pp. 72–75).
- (2012). “On the Convexity Number of Graphs”. *Graphs and Combinatorics* 28.3, pp. 333–345. MR: 2912658. Zbl: 1256.05123 (ver pp. 79, 82, 83).
- M. C. Dourado, F. Protti e J. L. Szwarcfiter (2010). “Complexity results related to monophonic convexity”. *Discrete Applied Mathematics* 158.12, pp. 1268–1274. MR: 2652003. Zbl: 1209.05130 (ver pp. 89–91).

- M. C. Dourado, D. Rautenbach, V. F. dos Santos, P. M. Schäfer e J. L. Szwarcfiter (2013). “On the Carathéodory number of interval and graph convexities”. *Theoretical Computer Science* 510, pp. 127–135. MR: 2912658. Zbl: 1419.05143 (ver pp. 12, 84).
- M. C. Dourado, D. Rautenbach, V. F. dos Santos, P. M. Schäfer, J. L. Szwarcfiter e A. Toman (2013). “Algorithmic and structural aspects of the P3-Radon number”. *Annals of Operations Research* 206, pp. 75–91. MR: 3073839. Zbl: 1270.05062 (ver p. 57).
- M. C. Dourado, D. Rautenbach, V. G. P. de Sá e J. L. Szwarcfiter (2013). “On the geodetic Radon number of grids”. *Discrete Mathematics* 313.1, pp. 111–121. MR: 3016978. Zbl: 1254.05193 (ver p. 86).
- M. C. Dourado, V. G. P. de Sá, D. Rautenbach e J. L. Szwarcfiter (2016). “Near-linear-time algorithm for the geodetic Radon number of grids”. *Discrete Applied Mathematics* 210, pp. 277–283. MR: 3513781. Zbl: 1339.05304 (ver p. 86).
- M. C. Dourado e R. M. Sampaio (2016). “Complexity aspects of the triangle path convexity”. *Discrete Applied Mathematics* 206, pp. 39–47. MR: 3490426. Zbl: 1335.05045 (ver pp. 41, 93, 94).
- R. Downey e M. Fellows (2012). *Parameterized Complexity*. Springer, pp. xv+533. MR: 1656112 (ver pp. 61, 107, 136).
- F. F. Dragan, F. Nicolai e A. Brandstädt (1999). “Convexity and HHD-free graphs”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 12.1, pp. 119–135. MR: 1652261. Zbl: 0916.05060 (ver pp. 15, 43, 44).
- P. A. Dreyer e F. S. Roberts (2009). “Irreversible k-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion”. *Discrete Applied Mathematics* 157, pp. 1615–1627. MR: 2510242. Zbl: 1163.92035 (ver p. 56).
- P. Duchet (1987). “Convexity in combinatorial structures”. Em: *Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis*. Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis. Circolo Matematico di Palermo, pp. 261–293. MR: 0920860. Zbl: 0644.52001 (ver p. 2).
- (1988). “Convex sets in graphs, II. Minimal path convexity”. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 44.3, pp. 307–316. MR: 0941439. Zbl: 0672.52001 (ver pp. 26, 28, 89).
- H. E. Dudeney (1908). *The Canterbury Puzzles and other curious problems*. New York: E. P. Dutton, p. 258 (ver p. 115).
- (1917). *Amusements in Mathematics*. London, Edimburgh and New York: Thomas Nelson and Sons Ltd, pp. v+259. MR: 0105345 (ver pp. 8, 29, 87).
- P. H. Edelman e R. E. Jamison (1985). “The theory of convex geometries”. *Geometriae Dedicata* 19, pp. 247–270. MR: 0815204. Zbl: 0577.52001 (ver p. 35).
- S. Ehard e D. Rautenbach (2019). “On some tractable and hard instances for partial incentives and target set selection”. *Discrete Optimization* 34, artigo 100547. MR: 4028724. Zbl: 1506.91132 (ver p. 111).
- M. Eirinaki, N. Moniz e K. Potika (2016). “Threshold-Bounded Influence Dominating Sets for Recommendations in Social Networks”. Em: *IEEE BD-Cloud-SocialCom-Sustain-Com*, pp. 408–415 (ver p. 111).

- T. Ekim, A. Erey, P. Heggernes, P. van't Hof e D. Meister (2012). "Computing Minimum Geodetic Sets of Proper Interval Graphs". Em: *LATIN 2012*. Springer, pp. 279–290. MR: 2979053. Zbl: 1353.68119 (ver p. 74).
- P. Erdős, E. Friedl, A. Hajnal e E. C. Milner (1972). "Some remarks on simple tournaments". *Algebra universalis* 2, pp. 238–245. MR: 0306034. Zbl: 0267.05104 (ver pp. 2, 98–101).
- P. Erdős e G. Szekeres (1935). "A combinatorial problem in geometry". *Compositio Mathematica* 2, pp. 463–470. MR: 1556929. Zbl: 61.0651.04 (ver pp. 2, 8, 9).
- Z. Ertem, E. Lykhovyd, Y. Wang e S. Butenko (2020). "The maximum independent union of cliques problem: complexity and exact approaches". *Journal of Global Optimization* 76, pp. 545–562 (ver p. 29).
- B. Escoffier e V. T. Paschos (2006). "Completeness in approximation classes beyond APX". *Theoretical Computer Science* 359.1, pp. 369–377. MR: 2251620. Zbl: 1099.68135 (ver p. 136).
- M. G. Everett e S. B. Seidman (1985). "The hull number of a graph". *Discrete Mathematics* 57.3, pp. 217–223. MR: 0816810. Zbl: 0584.05044 (ver pp. 20, 69, 70, 72).
- M. Farber (1983). "Characterizations of strongly chordal graphs". *Discrete Mathematics* 43, pp. 173–189. MR: 0685625. Zbl: 0514.05048 (ver p. 45).
- M. Farber e R. E. Jamison (1986). "Convexity in graphs and hypergraphs". *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 7.3, pp. 433–444. MR: 0844046. Zbl: 0591.05056 (ver pp. 38–40, 45, 74, 89).
- A. Farrugia (2005). "Orientable convexity, geodetic and hull numbers in graphs". *Discrete Applied Mathematics* 148.3, pp. 256–262. MR: 2147795. Zbl: 1066.05061 (ver p. 106).
- A. Flammenkamp (1998). "Progress in the No-Three-in-Line Problem, II". *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 81.1, pp. 108–113. MR: 1492871. Zbl: 0894.05007 (ver pp. 8, 29).
- P. Flocchini, R. Kráľovič, P. Ružička, A. Roncato e N. Santoro (2003). "On time versus size for monotone dynamic monopolies in regular topologies". *Journal of Discrete Algorithms* 1.2, pp. 129–150. MR: 2038425. Zbl: 1074.68045 (ver p. 111).
- J. Flum e M. Grohe (2006). *Parameterized Complexity Theory*. Springer-Verlag New York, pp. xiii+495. MR: 2238686 (ver pp. 136, 137).
- M. R. Garey e D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W. H. Freeman & Co., pp. x+340. MR: 0519066 (ver pp. 72, 79, 91, 131–133).
- M. Ghorbani, S. Klavžar, H. R. Maimani, M. Momeni, F. Rahimi-Mahid e G. Rus (2021). "The general position problem on Kneser graphs and on some graph operations". *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 41, pp. 1199–1213. MR: 4281067. Zbl: 1468.05057 (ver p. 87).
- J. G. Gimbel (2003). "Some remarks on the convexity number of a graph". *Graphs and Combinatorics* 19.3, pp. 357–361. MR: 2007897. Zbl: 1023.05079 (ver p. 83).
- M. C. Golumbic (1980). *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, pp. xx+284. MR: 0562306. Zbl: 0541.05054 (ver pp. 38, 45, 46, 48).

- P. M. Gruber e J. M. Wills (1993). *Handbook of Convex Geometry*. North Holland, pp. xi+735. MR: 1242973. Zbl: 0777.52001 (ver pp. 2, 5, 67).
- M. Gutierrez, F. Protti e S. Tondato (2023). “Convex geometries over induced paths with bounded length”. *Discrete Mathematics* 346.1, artigo 113133. arXiv: 2203.05588. MR: 4470066. Zbl: 1502.05172 (ver pp. 43, 52).
- G. Gutin e A. Yeo (2009). “On the number of connected convex subgraphs of a connected acyclic digraph”. *Discrete Applied Mathematics* 157.7, pp. 1660–1662. MR: 2510249. Zbl: 1228.05173 (ver p. 94).
- D. J. Haglin e M. J. Wolf (1996). “On Convex Subsets in Tournaments”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 9.1, pp. 63–70. MR: 1375415. Zbl: 0858.05050 (ver pp. 101, 108).
- F. Harary (1984). “Convexity in Graphs: Achievement and Avoidance Games”. Em: *Convexity and Graph Theory*. Ed. por M. Rosenfeld e J. Zaks. Vol. 87. North-Holland Mathematics Studies. North-Holland, p. 323. MR: 0791006 (ver pp. 3, 113, 117).
- F. Harary, E. Loukakis e C. Tsourous (1993). “The geodetic number of a graph”. *Mathematical and Computer Modelling* 17.11, pp. 89–95. MR: 1236514. Zbl: 0825.68490 (ver pp. 21, 69, 72).
- F. Harary e J. Nieminen (1981). “Convexity in graphs”. *Journal of Differential Geometry* 16.1, pp. 185–190. MR: 0638785. Zbl: 0493.05037 (ver pp. 3, 15, 20, 24, 87, 113).
- T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi e M. A. Henning (2020). *Topics in Domination in Graphs*. Developments in Mathematics. Springer, pp. viii+545. MR: 4180624. Zbl: 1470.05008 (ver p. 56).
- T. W. Haynes, M. A. Henning e C. Tiller (2003). “Geodetic achievement and avoidance games for graphs”. *Quaestiones Mathematicae* 26, pp. 389–397. MR: 2046144. Zbl: 1152.05377 (ver p. 114).
- E. Helly (1923). “Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten”. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 32, pp. 175–176. Zbl: 49.0534.02 (ver pp. 2, 6, 7, 28).
- A. Holroyd (2003). “Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation”. *Probability Theory and Related Fields* 125, pp. 195–224. MR: 1961342. Zbl: 1042.60065 (ver p. 111).
- E. Howorka (1981). “A characterization of Ptolemaic graphs”. *Journal of Graph Theory* 5, pp. 323–331. MR: 0625074. Zbl: 0437.05046 (ver p. 40).
- J.-T. Hung, L.-D. Tong e H.-T. Wang (2009). “The hull and geodetic numbers of orientations of graphs”. *Discrete Mathematics* 309.8, pp. 2134–2139. MR: 2510338. Zbl: 1208.05037 (ver p. 106).
- B. Jamison e S. Olariu (1988). “On the semi-perfect elimination”. *Advances in Applied Mathematics* 9, pp. 364–376. MR: 0956561. Zbl: 0684.05020 (ver p. 43).
- R. E. Jamison (1974). “A general theory of convexity”. Tese de dout. University of Washington. MR: 2624693 (ver p. 32).
- (1981). “Partition numbers for trees and ordered sets”. *Pacific Journal of Mathematics* 96.1, pp. 115–140. MR: 0634767. Zbl: 0482.52010 (ver pp. 3, 9, 30, 87).

- (1982). “A perspective on abstract convexity: classifying alignments by varieties”. *Convexity and Related Combinatorial Geometry*. MR: 0650310. Zbl: 0482 . 52001 (ver pp. 3, 15, 89).
- R. E. Jamison e R. Nowakowski (1984). “A Helly theorem for convexity in graphs”. *Discrete Mathematics* 51.1, pp. 35–39. MR: 0755039. Zbl: 0548 . 05052 (ver pp. 28, 89).
- M. M. Kanté, T. Marcillon e R. M. Sampaio (2019). “On the parameterized complexity of the geodesic hull number”. *Theoretical Computer Science* 791, pp. 10–27. MR: 4000715. Zbl: 1430 . 68129 (ver p. 77).
- M. M. Kanté e L. Nourine (2013). “Polynomial Time Algorithms for Computing a Minimum Hull Set in Distance-Hereditary and Chordal Graphs”. Em: *SOFSEM 2013*. Springer, pp. 268–279. MR: 3074097. Zbl: 1303 . 05195 (ver p. 77).
- M. M. Kanté, R. M. Sampaio, V. F. dos Santos e J. L. Szwarcfiter (2017). “On the geodesic rank of a graph”. *Journal of Combinatorics* 8.2, pp. 323–340. MR: 3610740. Zbl: 1367 . 05202 (ver pp. 30, 87).
- R. Karp (1972). “Reducibility among combinatorial problems”. Em: *Complexity of Computer Computations*. Ed. por R. E. Miller e J. W. Thatcher. Plenum, New York, pp. 85–103. MR: 0378476. Zbl: 1467 . 68065 (ver pp. 91, 107).
- L. Keiler, C. V. G. C. Lima, A. K. Maia, R. M. Sampaio e I. Sau (2023). “Target set selection with maximum activation time”. *Discrete Applied Mathematics* 338, pp. 199–217 (ver pp. 111, 112).
- L. Kellerhals e T. Koana (2022). “Parameterized Complexity of Geodesic Set”. *Journal of Graph Algorithms and Applications* 26.4, pp. 401–419. MR: 4481427. Zbl: 1499 . 68152 (ver pp. 72, 74).
- D. Kempe, J. M. Kleinberg e É. Tardos (2003). “Maximizing the Spread of Influence through a Social Network”. Em: *Proc. of the 9th ACM SIGKDD*. KDD '03, pp. 137–146 (ver pp. 56, 110, 111).
- B. K. Kim (2004). “A lower bound for the convexity number of some graphs”. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 14, pp. 185–191. MR: 2025431. Zbl: 1035 . 05036 (ver p. 83).
- S. Klavžar, Neethu P. K. e U. Chandran S. V. (2022). “The general position achievement game played on graphs”. *Discrete Applied Mathematics* 317, pp. 109–116. MR: 4422982. Zbl: 1490 . 05181 (ver p. 114).
- M. Krein e D. Milman (1940). “On extreme points of regular convex sets”. *Studia Mathematica* 9, pp. 133–138. MR: 0004990. Zbl: 0063 . 03360 (ver p. 4).
- H.-G. Leimer (1993). “Optimal decomposition by clique separators”. *Discrete Mathematics* 113, pp. 99–123. MR: 1212872. Zbl: 0793 . 05128 (ver p. 89).
- C. Lekkerkerker e J. Boland (1962). “Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line”. *Fundamenta Mathematicae* 51.1, pp. 45–64. MR: 0139159. Zbl: 0105 . 17501 (ver p. 48).
- F. W. Levi (1951). “On Helly’s theorem and the axioms of convexity”. *The Journal of Indian Mathematical Society* 15, pp. 65–76. MR: 0043487. Zbl: 0044 . 19101 (ver pp. 10, 31, 59).

- E. S. Lira (2016). “O número de Carathéodory na convexidade geodésica de grafos”. Diss. de mestr. Universidade Federal de Goiás (ver p. 85).
- C. Lund e M. Yannakakis (1994). “On the hardness of approximating minimization problems”. *Journal of the ACM (JACM)* 41.5, pp. 960–981. MR: 1371491. Zbl: 0814.68064 (ver p. 107).
- R. Mafore e F. Protti (2020). “Vector Domination in split-indifferent graphs”. *Information Processing Letters* 155. MR: 4042578 (ver p. 111).
- P. Manuel e S. Klavžar (2018). “A general position problem in graph theory”. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 98.2, pp. 177–187. MR: 3849577. Zbl: 1396.05033 (ver pp. 29, 87).
- T. Marcilon e R. M. Sampaio (2018a). “The maximum infection time of the P3 convexity in graphs with bounded maximum degree”. *Discrete Applied Mathematics* 251, pp. 245–257. MR: 3906701. Zbl: 1401.05159 (ver p. 60).
- (2018b). “The maximum time of 2-neighbor bootstrap percolation: Complexity results”. *Theoretical Computer Science* 708, pp. 1–17. MR: 3735031. Zbl: 1383.05299 (ver pp. 57, 59, 60, 63, 65, 111).
- (2018c). “The P3 infection time is $W[1]$ -hard parameterized by the treewidth”. *Information Processing Letters* 132, pp. 55–61. MR: 3763266. Zbl: 1427.68127 (ver p. 60).
- R. M. McConnell e J. P. Spinrad (1999). “Modular decomposition and transitive orientation”. *Discrete Mathematics* 201.1, pp. 189–241. MR: 1687819. Zbl: 0933.05146 (ver p. 75).
- M. Mezzini (2018). “Polynomial time algorithm for computing a minimum geodetic set in outerplanar graphs”. *Theoretical Computer Science* 745, pp. 63–74. MR: 3849797. Zbl: 1401.05285 (ver p. 74).
- H. Minkowski (1903). “Volumen und Oberfläche”. *Mathematische Annalen* 57, pp. 447–495. MR: 1511220. Zbl: 34.0649.01 (ver p. 2).
- (1911). “Theorie der Konvexen Körper”. Em: *Gesammelte Abhandlungen*. Ed. por D. Hilbert. Vol. 2. Capítulo 10. Leipzig: Teubner, pp. 131–229. MR: 1511572 (ver pp. 2, 4).
- J. W. Moon (1972). “Embedding tournaments in simple tournaments”. *Discrete Mathematics* 2.4, pp. 389–395. MR: 0302492. Zbl: 0236.05108 (ver pp. 98, 100).
- S. Moran e A. Yehudayoff (2020). “On weak ϵ -nets and the Radon number”. *Discrete & Computational Geometry* 64.4, pp. 1125–1140. MR: 4183358. Zbl: 1472.52002 (ver p. 86).
- M. Moscarini (2020). “On the geodetic iteration number of a graph in which geodesic and monophonic convexities are equivalent”. *Discrete Applied Mathematics* 283, pp. 142–152. MR: 4114887. Zbl: 1442.05112 (ver pp. 24, 87).
- M. Nečásková (1988). “A note on the achievement geodetic games”. *Quaestiones Mathematicae* 12, pp. 115–119. MR: 0979252 (ver p. 114).
- Neethu P. K. e U. Chandran S. V. (2022). “A note on the convexity number of the complementary prisms of trees”. *Discrete Applied Mathematics* 319, pp. 480–486. MR: 4457817. Zbl: 1494.05040 (ver p. 83).

- A. Nichterlein, R. Niedermeier, J. Uhlmann e M. Weller (2013). “On tractable cases of target set selection”. *Social Network Analysis and Mining* 3.2, pp. 233–256. Zbl: 1310.68115 (ver pp. 60, 61, 111).
- E. A. Nordhaus e J. W. Gaddum (1956). “On complementary graphs”. *The American Mathematical Monthly* 63.3, pp. 175–177. MR: 0078685. Zbl: 0070.18503 (ver p. 83).
- S. Olariu (1989). “Weak bipolarizable graphs”. *Discrete Mathematics* 74, pp. 159–171. MR: 0989132. Zbl: 0666.05062 (ver p. 43).
- S. V. Padmavathi (2015). “Relation Between Convexity Number and Independence Number of a Graph”. *Annals of Pure and Applied Mathematics* 9.1, pp. 9–12 (ver p. 83).
- D. B. Parker e R. F. Westhoff (2012). “Convex invariants in multipartite tournaments”. *Australasian Journal of Combinatorics* 54, pp. 19–36. MR: 3013238. Zbl: 1278.05116 (ver p. 100).
- D. B. Parker, R. F. Westhoff e M. J. Wolf (2006). “Two-path convexity in clone-free regular multipartite tournaments”. *Australasian Journal of Combinatorics* 36, pp. 177–196. MR: 2262618. Zbl: 1109.05047 (ver p. 100).
- (2008). “On two-path convexity in multipartite tournaments”. *European Journal of Combinatorics* 29, pp. 641–651. MR: 2397345. Zbl: 1141.05039 (ver p. 100).
- (2009). “Convex independence and the structure of clone-free multipartite tournaments”. *Discussions Mathematicae Graph Theory* 29.1, pp. 51–69. MR: 2548787. Zbl: 1213.05117 (ver p. 100).
- K. S. Parvathy e A. Vijayakumar (1998). “Geodesic iteration number”. Em: Conference on Graph Connections. Allied Publishers, New Delhi, India, pp. 91–94. MR: 1712832. Zbl: 0957.05060 (ver p. 24).
- B. Patkós (2020). “On the general position problem on Kneser graphs”. *Ars Mathematica Contemporanea* 18, pp. 273–280. MR: 4165849 (ver p. 87).
- I. M. Pelayo (2013). *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer, pp. viii+112. MR: 3112165. Zbl: 1285.05001 (ver pp. 10, 21, 26, 67).
- D. Peleg (1998). “Size bounds for dynamic monopolies”. *Discrete Applied Mathematics* 86.2, pp. 263–273. MR: 1636420. Zbl: 0910.90286 (ver pp. 110, 111).
- L. D. Penso, F. Protti, D. Rautenbach e U. S. Souza (2015). “Complexity analysis of P3-convexity problems on bounded-degree and planar graphs”. *Theoretical Computer Science* 607. Algorithmic Aspects in Information and Management, pp. 83–95. MR: 3426505. Zbl: 1332.68059 (ver p. 60).
- N. Polat (1995). “A Helly theorem for geodesic convexity in strongly dismantlable graphs”. *Discrete Mathematics* 140.1-3, pp. 119–127. MR: 1333714. Zbl: 0828.05062 (ver p. 86).
- (2000). “On infinite bridged graphs and strongly dismantlable graphs”. *Discrete Mathematics* 211.1-3, pp. 153–166. MR: 1735348. Zbl: 0959.05100 (ver p. 86).
- N. Polat (2003). “On constructible graphs, locally Helly graphs, and convexity”. *Journal of Graph Theory* 43.4, pp. 280–298. MR: 1994299. Zbl: 1023.05044 (ver p. 86).
- F. Protti e J. V. C. Thompson (2023). “All-path convexity: Combinatorial and complexity aspects”. arXiv: 2303.18029 (ver pp. 94–96).

- J. Radon (1921). “Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten”. *Mathematische Annalen* 83.1, pp. 113–115. MR: 1512002. Zbl: 48 . 0834 . 04 (ver pp. 2, 6).
- I. Ramos, V. F. dos Santos e J. L. Szwarcfiter (2014). “Complexity aspects of the computation of the rank of a graph”. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 16.2. MR: 3259607. Zbl: 1301 . 05092 (ver pp. 30, 57).
- F. S. Roberts (1969). “Indifference graphs”. Em: *Proof Techniques in Graph Theory*. Ed. por F. Harary. New York, NY: Academic Press, pp. 139–146. MR: 0252267 (ver p. 49).
- N. Robertson e P. D. Seymour (1986). “Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width”. *Journal of algorithms* 7.3, pp. 309–322. MR: 0855559. Zbl: 0611 . 05017 (ver p. 130).
- E. Sampathkumar (1984). “Convex sets in a graph”. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics* 15, pp. 1065–1071. MR: 0765010. Zbl: 0563 . 52001 (ver p. 94).
- T. J. Schaefer (1978). “On the complexity of some two-person perfect-information games”. *Journal of Computer and System Sciences* 16.2, pp. 185–225. MR: 0490917. Zbl: 0383 . 90112 (ver pp. 115, 135).
- G. Sierksma (1975). “Carathéodory and Helly-numbers of convex-product-structures”. *Pacific Journal of Mathematics* 61.1, pp. 275–282. Zbl: 0301 . 52002 (ver pp. 7, 28).
- (1976). “Axiomatic Convexity Theory and the Convex Product Space”. Tese de dout. University of Groningen. Zbl: 0336 . 52001 (ver p. 32).
- (1977). “Relationships between Carathéodory, Helly, Radon and Exchange numbers of convexity spaces”. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3.25, pp. 115–132. MR: 0514026. Zbl: 0354 . 52005 (ver p. 32).
- G. Sierksma, H. M. Mulder e M. Changat (2000). *Convexities related to path properties on graphs; a unified approach*. Research Report 00A45. University of Groningen. Zbl: 1058 . 05043 (ver p. 32).
- E. Steinitz (1916). “Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme (Schluß)”. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 146, pp. 1–52. MR: 1580921. Zbl: 45 . 0380 . 02 (ver p. 4).
- L. J. Stockmeyer e A. R. Meyer (1973). “Word Problems Requiring Exponential Time (Preliminary Report)”. Em: *Proceedings of the Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing – ACM STOC’73*. ACM, pp. 1–9. MR: 0418518. Zbl: 0359 . 68050 (ver p. 134).
- G. Szekeres e L. Peters (2006). “Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem”. *The ANZIAM Journal* 48.2, pp. 151–164. MR: 2291511. Zbl: 1152 . 52008 (ver p. 9).
- E. J. Thomas e U. Chandran S. V. (2020). “Characterization of classes of graphs with large general position number”. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 17.3, pp. 935–939. MR: 4181597. Zbl: 1468 . 05066 (ver p. 87).
- J. Tian e K. Xu (2021). “The general position number of Cartesian products involving a factor with small diameter”. *Applied Mathematics and Computation* 403, artigo 126206. MR: 4235988 (ver p. 87).

- J. Tian, K. Xu e S. Klavžar (2021). “The general position number of the Cartesian product of two trees”. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 104, pp. 1–10. MR: 4279308 (ver p. 87).
- H. Tverberg (1966). “A Generalization of Radon’s Theorem”. *Journal of the London Mathematical Society* 41.1, pp. 123–128. MR: 0187147. Zbl: 0131 . 20002 (ver p. 6).
- M. L. J. van de Vel (1993). *Theory of convex structures*. Vol. 50. Elsevier, pp. xv+540. Zbl: 0785 . 52001 (ver pp. 2, 5, 7, 10, 11, 13, 26–28, 32, 67).
- M. Yannakakis (1981). “Node-Deletion Problems on Bipartite Graphs”. *SIAM Journal on Computing* 10.2, pp. 310–327 (ver pp. 29, 57).
- Y. Yao, M. He e S. Ji (2022). “On the general position number of two classes of graphs”. *Open Mathematics* 20.1, pp. 1021–1029. MR: 4480630. Zbl: 1496 . 05044 (ver p. 87).
- E. Zermelo (1913). “Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels”. Em: *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, pp. 501–504 (ver p. 113).
- D. Zuckerman (2006). “Linear Degree Extractors and the Inapproximability of Max Clique and Chromatic Number”. Em: STOC’06. ACM, pp. 681–690. MR: 2277193. Zbl: 1301 . 68152 (ver p. 60).

Índice de Notações

$\alpha(G)$, 30, 125
 $\omega(G)$, 58, 86, 125
 $\delta(G)$, 104, 124

C
 $\text{cghn}(G)$, 118, 122
 $\text{cgin}(G)$, 118
 $\text{con}(G)$, 14, 23, 58, 78
 $\text{conv}(S)$, 4, 11, 20, 26, 30, 42
 $\text{cth}(G)$, 14, 26, 58
 $\text{cth}(S)$, 5

D
 $d_D^+(v)$, 102, 129
 $d_{\overline{D}}(v)$, 102, 129

E
 $\text{Ext}(G)$, 14, 31, 37, 120
 $\text{Ext}(S)$, 4, 11, 39, 51

G
 $\text{ggp}(G)$, 118
 $\text{ghn}(G)$, 118, 122
 $\text{gin}(G)$, 118
 $\text{gp}(G)$, 14, 28, 30, 58
 $\text{gp}(S)$, 8

$\text{grk}(G)$, 118

H
 $\text{h}\ell(G)$, 14, 27, 58, 86
 $\text{h}\ell(S)$, 7
 $\text{hn}(G)$, 14, 20, 58, 122
 $\overrightarrow{\text{hn}}(D)$, 98, 100

I
 $\text{I}(S)$, 5, 12
 $\overrightarrow{\text{I}}(S)$, 98, 100
 $\text{in}(G)$, 14, 21, 58
 $\overrightarrow{\text{in}}(D)$, 98, 100

R
 $\text{rd}(G)$, 14, 27, 58, 86
 $\text{rd}(S)$, 6
 $\text{rk}(G)$, 14, 30, 58
 $\text{rk}(S)$, 9

T
 $\text{ti}(G)$, 14, 24, 58
 $\text{ti}(S)$, 5
 $\text{tp}(G)$, 14, 24, 58

Índice de Autores

- B**
Barány, Imre, 2
Berge, Claude, 8, 28
Bollobás, Béla, 24, 87
- C**
Carathéodory, Constantin, 5, 26
- D**
Duchet, Pierre, 8, 26, 28, 89
Dudeney, Henry, 8, 29, 87, 115
- E**
Eckhoff, Jürgen, 32
Einstein, Albert, 2
Erdős, Paul, 2, 8
- G**
Golombic, Martin C., 38, 48
- H**
Harary, Frank, 3, 21, 24, 113, 117
Helly, Eduard, 6, 27
- J**
Jamison, Robert E., 3, 9, 28, 30, 32, 40, 89
- M**
Minkowski, Hermann, 2, 4, 11, 35, 51
- P**
Pelayo, Ignacio M., 10, 21, 67
- R**
Radon, Johann, 6, 27, 86
- S**
Sierksma, Gerard, 8, 28, 32
Steinitz, Ernst, 4
Szekeres, Esther (Klein), 9
Szekeres, George, 8
Szwarcfiter, Jayme L., 3, 12, 16, 30, 57, 75, 82, 91
- V**
van de Vel, Marcel L. J., 2, 8, 10, 32, 67
- Z**
Zermelo, Ernst, 113

Índice Remissivo

- C**
- caminho triangular, 41, 92
 - Carathéodory independente, 6, 26, 84
 - classe de grafo
 - árvore, 19, 21, 26, 57, 105, 111, 128
 - bipartido, 24, 30, 57, 61, 65, 90, 111, 114
 - cografo, 43, 74, 111
 - cordal, 38
 - de intervalo, 38, 46
 - distância hereditária, 15, 24, 30, 78, 87, 111
 - hereditária, 50
 - planar, 24
 - Ptolemaico, 40
 - split, 60, 74, 84, 91, 111
 - clique, 16, 20, 27, 28, 38, 58, 86, 89, 91, 115, 125
 - coloração de grafo, 130
 - conjunto
 - coconvexo, 23, 68
 - convexo, 4, 67, 98, 100
 - de envoltória, 14, 98, 100
 - de intervalo, 14, 99, 100
 - dominante, 56, 72
 - independente, 30, 94, 115, 125, 128, 130
 - transversal, 61
 - convexamente independente, 8, 30
 - convexidade, 10
 - de pedágio, 46
 - fraco, 49
 - de Steiner, 12, 97
 - de todos os caminhos, 94
 - forte, 44
 - geodésica, 15, 19
 - geométrica, 11, 35, 120
 - monofônica, 15, 19
 - P_3 , 15, 19, 56
 - triangular, 15, 92
- D**
- decomposição
 - em árvore, 130
 - em caminho, 130
 - Desigualdade
 - de Eckhoff–Jamison, 32
 - de Levi, 31
 - de Nordhaus–Gaddum, 83
 - diâmetro, 69
 - digrafo, 129

E

espectro

- contínuo, 104
- de envoltória, 104
- geodésico, 103

F

fecho convexo, 4, 11
função de intervalo, 5, 12

G

geometria convexa, 11, 35, 120
grafo, 3, 13, 123

- direcionado, 129
- orientado, 98, 129
 - transitivo, 102
- planar, 130

 grau, 124

- de entrada, 129
- de saída, 129

H

Helly independente, 8, 27, 86

J

jogo

- da envoltória, 117
- da posição convexa, 116, 117
- da posição geral, 114, 117
- do intervalo, 113, 117
- Node Kayles, 115
- variante
 - normal, 113
 - ótima, 117
 - pobre (*misère*), 113

L

largura

- em árvore, 61, 74, 130
- em caminho, 130

M

Minkowski–Krein–Milman
propriedade, 11, 35, 41, 51

teorema, 4, 11

modelo TSS, 16, 110

N

número

- cromático, 130
- de Carathéodory, 5, 26, 84
- de convexidade, 14, 23, 78
- de dissociação, 29
- de envoltória, 14, 20, 99, 100
- de envoltória orientável, 105
- de Helly, 27, 86
- de intervalo, 14, 21, 98, 100
- de intervalo orientável, 105
- de jogo de convexidade, 118
- de posição geral, 8, 28
- de Radon, 27, 86
- IUC, 29

O

operador de fecho, 11

P

ponto extremo, 4, 11, 120
posição convexa, 8, 30
posição geral, 8, 28
posto (*rank*), 9, 30
propriedade antitroca, 35, 41, 51

R

Radon independente, 6, 27, 86

T

tempo

- de iteração, 5, 13, 14, 24
- de percolação, 14, 24

Teorema de

- Carathéodory, 5
- Erdős–Szekerés, 8
- Helly, 6
- Radon, 6
- Tverberg, 6
- Zermelo, 113

torneio, 100

V

vértice

extremo, 11, 99, 120
simplicial, 20, 38, 68, 99
transitivo, 99

vizinhança, 124

de entrada, 129
de saída, 129
fechada, 38, 124, 138

Títulos Publicados — 34º Colóquio Brasileiro de Matemática

Uma introdução à convexidade em grafos – *Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio*

Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos – *Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco*

Introdução aos espaços de Banach – *Aldo Bazán, Alex Farah Pereira e Cecília de Souza Fernandez*

Contando retas em superfícies no espaço projetivo – *Jacqueline Rojas, Sally Andria e Wallace Manguiera*

Paths and connectivity in temporal graphs – *Andrea Marino e Ana Silva*

Geometry of Painlevé equations – *Frank Loray*

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica – *Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcilio Santana*

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres – *João Vitor da Silva e Gleydson Ricarte*

The ∞ -Laplacian: from AMLEs to Machine Learning – *Damião Araújo e José Miguel Urbano*

Homotopical dynamics for gradient-like flows – *Guido G. E. Ledesma, Dahisy V. S. Lima, Margarida Mello, Ketty A. de Rezende e Mariana R. da Silveira*



Júlio Araújo

Júlio Araújo, nascido em Pacoti-CE, teve sua formação em Computação na UFC e na Université de Nice - Sophia Antipolis. É membro do Departamento de Matemática da UFC desde 2014. É apaixonado por futebol e por grafos. Apesar de já ser aposentado dos gramados, não quer se aposentar dos grafos tão cedo!

Mitre Dourado

Mitre é baiano de Irecê e concluiu a graduação em Ciência da Computação na UFBA em 1999. Apaixonou-se pelo Rio de Janeiro, ao conhecer a cidade, em 1997, para participar do Colóquio Brasileiro de Matemática. Mudou-se para o Rio, onde obteve o doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação na UFRJ em 2005.

Fábio Protti

Fábio fez a graduação no IME-USP em 1986 e obteve o doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação na UFRJ. Desde garoto, tem dois interesses: a Matemática e o Palmeiras, não necessariamente nessa ordem. Seu sonho é ver a questão P vs NP resolvida, conseguindo entender a solução.

Rudini Sampaio

Rudini é de Fortaleza e fez Engenharia de Computação no ITA em 1998 e doutorado na área de Combinatória no IME-USP, onde introduziu o conceito de permuton. Hoje leciona na UFC. Quando era mais novo, amava atletismo; hoje tênis de mesa e xadrez. É fã de Tolkien e garante que Senhor dos Anéis é melhor que Game of Thrones.

Uma introdução à convexidade em grafos

impa



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-85-244-0545-7



9 788524 405457